Notazione dei numeri utilizzata

Quando i numeri primi sono scritti come Px, Py, Pz ecc., i numeri primi coinvolti sono da intendersi come non necessariamente distinti.
Quando i numeri primi sono scritti come P1, P2, P3 ecc., i numeri primi coinvolti sono da intendersi come necessariamente distinti.
Pertanto, una formula come Nd = Px + (P1 + P2), vuol dire che, in primo luogo, ci sono sempre dei numeri primi P1 e P2 necessariamente distinti, e che Px è o uguale a P1, o uguale a P2 o differente da P1 e da P2.
Nel seguito si farà riferimento agli insiemi G1 e G2 definiti nel documento: "*Sulle eccezioni alla Congettura di Goldbach*".

Precisazione sulla conformazione dell'Insieme G2

H. Helfgott, nella sua Dimostrazione della Congettura debole di Goldbach, "*The ternary Goldbach conjecture is true*", Corollary 1.1 (to the main theorem), p. 04 del pdf, afferma che ogni numero pari uguale o superiore a 4 può essere inteso come

Npa = Nd – 3

In altre parole, H. Helfgott considera un generico elemento dell'Insieme G2 come qualsiasi numero dispari a cui si sottrae 3: in questa maniera, il primo elemento di G2 è 4, perché 4 = 7 – 3, cioè 4 = (2 + 2 + 3) – 3, e così via, per tutti gli altri numeri pari.
Come si vede in "*Sulle eccezioni alla Congettura di Goldbach*", l'Insieme G2 è dato dalla somma di quattro non necessariamente distinti numeri primi: ciò significa che l'approccio è un po' diverso.
H. Helfgott ottiene l'Insieme G2 come la sottrazione di 3 a ciascun numero dispari espresso come somma di tre non necessariamente distinti numeri primi (Npa = (Px + Py + Pz) - 3): ne consegue, come si diceva, che il primo elemento dell'Insieme G2 è 4.
Il sottoscritto ottiene l'Insieme G2 come somma di 3 a ciascun numero dispari espresso come somma di tre non necessariamente distinti numeri primi (Npa = (Px + Py + Pz) + 3): ne consegue che il primo elemento dell'Insieme G2 sarebbe 10.
In sostanza, nella formulazione data dal sottoscritto, lo scheletro fondamentale dell'Insieme G2 sarebbero tutti i numeri dispari del Teorema debole di Goldbach a cui si aggiunge 3: in altre parole, per ogni numero uguale o superiore a 10, c'è sempre almeno un elemento nell'Insieme G2 della forma Npa = (Px + Py + Pz) + 3.
Purtroppo, però, questo non è sufficiente ancora per ottenere l'Insieme G2 per come è stato definito in "*Sulle eccezioni alla Congettura di Goldbach I*", perché è stato dimostrato anche che l'Insieme G2 è da intendersi come G1 + G1: lo scheletro fondamentale sopra esposto non è in grado di garantire ciò. Basti pensare che, tra le altre cose, in G2 definito come G1 + G1, il primo elemento è 8 = (2 + 2) + (2 + 2), non 10 come detto sopra, e che elementi del tipo Npa = 4 P1 non è possibile che siano presenti supponendo l'Insieme G2 come solamente composto da elementi del tipo (Px + Py + Pz) + 3.
Il che richiede di dover spiegare come far quadrare i conti.
Definendo l'Insieme G2 come G1 + G1, si prosegue (si spera in maniera relativamente indolore...) come segue:

1. Si prendano i numeri dispari del Teorema debole di Goldbach e si aggiunge 3 (Npa = Px + Py + Pz + 3): questo è lo scheletro fondamentale, per ogni numero uguale o superiore a 10 c'è sempre almeno un elemento dell'Insieme G2 del tipo Npa = (Px + Py + Pz) + 3;
2. Su questo scheletro, si aggiunge il resto: dati due elementi non necessariamente distinti dell'Insieme G1, G(a) e G(b), se sommati insieme abbiamo che G(a) + G(b) = Npa, e dato che sappiamo che Npa = (Px + Py + Pz) + 3, questo aggancia tutti gli altri elementi che sono intendibili come somma di quattro numeri primi non necessariamente distinti ad almeno un elemento dello scheletro, ottenendo un Insieme G2 inteso come G1 + G1;

3. Non di meno, c'è una piccola eccezione: il numero 8 non è intendibile come Npa = (Px + Py + Pz) + 3, ma solamente come 8 = 4 P1 = (2 + 2) + (2 + 2).

Riduzioni per i numeri pari

Proposizione 01

Ogni numero pari uguale o superiore a 8 può essere espresso come

- Npa = (P1 + P2) + (P3 + P4);
- Npa = (2 P1) + (P2 + P3);
- Npa = (2 P1) + (2 P2);
- Npa = (2 P1) + (2 P1), cioè Npa = 4 P1;
- Npa = (2 P1) + (P1 + P2), cioè Npa = 3 P1 + P2.

Dimostrazione

Per quanto dimostrato in "*Sulle eccezioni alla Congettura di Goldbach*", l'Insieme G2 è composto dalla somma fra due elementi non necessariamente distinti di G1.
Alla luce di ciò, assumendo Npa = Px + Py + Pz + Pk, possiamo avere che:

- Px, Py, Pz e Pk sono distinti, quindi avremo Npa = P1 + P2 + P3 + P4;
- Px e Py non sono distinti, mentre Pz e Pk lo sono, quindi avremo Npa = (2 P1) + (P2 + P3);
- Px e Py sono distinti, Pz e Pk sono distinti, ma Px e Pk non sono uguali, quindi avremo Npa = (2 P1) + (2 P2);
- Px, Py e Pz non sono distinti, mentre Pk è distinto dagli altri tre, quindi avremo Npa = (2 P1) + (P1 + P2), cioè Npa = 3 P1 + P2;
- Px, Py, Pz e Pk non sono distinti, quindi avremo Npa = 2 P1 + 2 P1, cioè Npa = 4 P1.

- CVD

Proposizione 02

Ogni numero pari della forma Npa = 4 P1 trova almeno un corrispettivo in Npa = (P1 + P2) + (P3 + P4), Npa = (2 P1) + (P2 + P3) oppure Npa = 3 P1 + P2.
Ogni numero pari della forma Npa = (2 P1) + (2 P2) trova almeno un corrispettivo in Npa = (P1 + P2) + (P3 + P4), Npa = (P1 + P2) + (2 P3) oppure Npa = 3 P1 + P2.

Dimostrazione

Si assuma un numero pari della forma Npa = 4 P1.
Applicando il Postulato di Bertrand tra Npa/2 ed Npa, otteniamo un numero primo, denominato P1'.
Sottraendo P1' da Npa, otterremo un numero dispari:

$$Npa - P1' = Nd$$

Applichiamo il Teorema debole di Goldbach ad Nd, ed avremo che

$$Npa - P1' = Px + Py + Pz$$
$$Npa = P1' + Px + Py + Pz$$

Esprimendo in maniera distinta Px, Py e Pz avremo:

- Npa = (P1' + P1) + (P2 + P3);

- Npa = (P1' + P2) + (2 P3);
- Npa = P1' + 3 P1, ovvero Npa = (P1' + P1) + (2 P1).

P1', in quanto ottenuto col Postulato applicato ad Npa, non sarà mai uguale ad i numeri primi che si ottengono applicando il Teorema debole di Goldbach ad Nd, perché è almeno pari a Npa/2, mentre i primi Px, Py e Pz sono tutti minori di Npa/2, altrimenti la somma P1’ + Px + Py + Pz sarebbe maggiore di Npa.
Pertanto, ogni numero pari della forma Npa = 4 P1 trova almeno un corrispettivo in Npa = (P1 + P2) + (P3 + P4), Npa = (2 P1) + (P2 + P3) oppure Npa = 3 P1 + P2.
In seconda battuta, questa dimostrazione è valida anche per i numeri del tipo Npa = (2 P1) + (2 P2).
Infatti

Npa = (2 P1) + (2 P2)

applicando ad Npa il Postulato di Bertrand, otteniamo P1'. Sottraiamo P1' da Npa:

Npa – P1' = Nd

Applichiamo ad Nd il Teorema debole di Goldbach:

Npa – P1' = Px + Py + Pz
Npa = P1' + Px + Py + Pz

Esprimiamo in maniera distinta Px, Py e Pz, ed avremo:

- Npa = (P1' + P1) + (P2 + P3);
- Npa = (P1' + P1) + (2 P2);
- Npa = P1' + 3 P1, ovvero Npa = (P1' + P1) + (2 P1).

Anche qui, P1' e P1 non sono mai uguali, per i motivi già espressi sopra.
Pertanto, ogni numero pari della forma Npa = (2 P1) + (2 P2) trova almeno un corrispettivo in Npa = (P1 + P2) + (P3 + P4), Npa = (2 P1) + (P2 + P3) oppure Npa = 3 P1 + P2. - CVD

Proposizione 03

Ogni numero pari uguale o superiore ad 8 può essere espresso come Npa = (Px + Py) + (P1 + P2).
Per ogni elemento di G2, c'è sempre un elemento di G1 del tipo (P1 + P2), come sua condizione necessaria ma non sufficiente.

Dimostrazione

In base alla Proposizione 02, ogni numero pari uguale o superiore ad 8 può essere espresso come Npa = (2 P1) + (P2 + P3), Npa = (P1 + P2) + (P3 + P4) oppure Npa = 3 P1 + P2: come si vede abbiamo sempre la presenza di un numero del tipo (P1 + P2), da che si può affermare che ogni numero pari uguale o superiore ad 8 può essere espresso come Npa = (Px + Py) + (P1 + P2).
Chiaramente, ciò significa che per ogni elemento di G2, c'è sempre almeno un elemento di G1 del tipo (P1 + P2), come sua condizione necessaria ma non sufficiente. - CVD

Proposizione 04

Ogni numero pari del tipo Npa = 3 P1 + P2 trova un corrispettivo in Npa = (2 P1) + (P2 + P3) oppure Npa = (P1 + P2) + (P3 + P4).
Se si preferisce, ogni numero pari uguale o superiore a 10 può essere espresso come Npa = Px + (P1

+ P2 + P3).

Dimostrazione

Per la Proposizione 02, possiamo affermare che tutti i numeri pari possono essere intesi come:

- Npa = 2 P1 + P2 + P3;
- Npa = P1 + P2 + P3 + P4;
- Npa = 3 P1 + P2.

In base alle precisazioni sulla conformazione dell'Insieme G2, qui sopra riportate, sappiamo che ogni numero uguale o superiore a 10 trova corrispondenza in almeno un elemento dell'Insieme G2 della forma

$$Npa = (Px + Py + Pz) + 3$$

Per la Proposizione 03, c'è sempre almeno un elemento dell'Insieme G1 del tipo (P1 + P2) come condizione necessaria ma non sufficiente per ogni elemento dell'Insieme G2.
Pertanto, se ogni ogni numero pari Npa uguale o superiore ad 10 è interpretabile come Npa = (Px + Py + Pz) + 3, e Npa = (Px + Py + Pz) + 3 è un elemento dell'Insieme G2, e condizione necessaria ma non sufficiente per l'Insieme G2 è un elemento dell'Insieme G1 della forma (P1 + P2), allora possiamo affermare che

$$Npa = (P1 + P2) + (Px + 3)$$

- CVD

Proposizione 05 (Proprietà 2 P1)

Fra x e 2x, con x uguale o superiore a 6, c'è sempre un numero pari della forma 2 P1 più piccolo di 2x (Proprietà 2 P1).

Dimostrazione

Se x è maggiore od uguale a 2, avremmo due casi:

- Se x è pari, allora x = 2h, con h maggiore od uguale ad 1, per cui si può applicare il Postulato di Bertrand al numero h, ottenendo che esiste un numero primo P1 compreso tra (h + 1) e (2 h = x). Allora il numero 2 P1 è compreso tra 2 (h + 1) = 2h + 2 = x + 2, e 2 (2h) = 2x, e quindi anche tra x + 1 e 2x;
- Se x è dispari, allora x = 2 k + 1, con k maggiore od uguale ad 1. Applicando il Postulato di Bertrand al numero k, si ottiene che esiste un numero primo P1 compreso tra k + 1 e 2k. Allora il numero 2 P1 è compreso tra 2(k + 1) = 2k + 2 = x + 1, e 2 (2k) = 2 (x - 1) = 2x - 2, quindi il numero 2 P1 è compreso anche tra x + 1 e 2x.

Come si vede, fra x e 2x c'è sempre un numero pari della forma 2 P1. - CVD

Proposizione 06

Ogni numero pari Npa uguale o superiore a 12 del tipo Npa = (P1 + P2) + (P3 + P4) può essere inteso come Npa = 2 P1 + P2 + Cp, dove Cp è un numero coprimo con Npa – 2 P1.

Dimostrazione

Assumiamo un numero pari del tipo $Npa = P1 + P2 + P3 + P4$.
Per la Proprietà 2 P1, possiamo sempre trovare un numero pari del tipo $2\ P1'$ più piccolo di Npa, che possiamo sottrarre:

$$Npa = P1 + P2 + P3 + P4$$
$$Npa - 2\ P1' = Npa'$$

Applicando il Teorema di Bertrand-Goldbach (enunciato e dimostrazione si trovano in http://www.dimostriamogoldbach.it/it/strategia-fattorizzazione/) ad Npa' abbiamo

$$Npa - 2\ P1' = Npa'$$
$$Npa - 2\ P1' = P2 + Cp$$
$$Npa = 2\ P1' + P2 + Cp$$

Come si vede, ogni numero pari $Npa = P1 + P2 + P3 + P4$ può essere inteso come $Npa = 2\ P1' + P2 + Cp$, dove Cp è un numero coprimo con $Npa - 2\ P1$. - CVD

Riduzioni per i numeri dispari

Proposizione A

Ogni numero dispari uguali o superiore a 7 può essere espresso come Nd = P1 + P2 + P3, Nd = 2 P1 + P2 o Nd = 3 P1.

Dimostrazione

Per il Teorema debole di Goldbach, ogni numero dispari Nd uguale o superiore a 7 è esprimibile come Nd = Px + Py + Pk.
Se Px, Py e Pk sono distinti, abbiamo che Nd = P1 + P2 + P3.
Px e Py non sono distinti, ma Pk è distinto dagli altri due abbiamo che Nd = 2 P1 + P2.
Se Px, Py e Pk non sono necessariamente distinti, abbiamo che Nd = 3 P1.
Come si vede, ogni numero dispari uguali o superiore a 7 può essere espresso come Nd = P1 + P2 + P3, Nd = 2 P1 + P2 o Nd = 3 P1. - CVD

Proposizione B

Ogni numero dispari Nd del tipo Nd = 3 P1 trova un corrispettivo in Nd = 2 P1 + P2 oppure Nd = P1 + P2 + P3. Se si preferisce, ogni numero dispari Nd uguale o superiore a 7 può essere espresso come Nd = Px + (P1 + P2).

Dimostrazione

Per la Proposizione 04, possiamo affermare che ogni numero pari Npa uguale o superiore a 10 può essere scritto come Npa = Px + (P1 + P2 + 3). E quindi

$$Npa = Px + (P1 + P2 + 3)$$

$$Npa = (Px + P1 + P2) + 3$$

$$Npa – 3 = (Px + P1 + P2)$$

Esprimendo distintamente Px, avremo

- (2 P1 + P2);
- (P1 + P2 + P3).

Visto il legame fra l'Insieme G2 ed il Teorema debole di Goldbach, Npa – 3 garantisce che ci siano tutti i numeri dispari e non ne manchi nessuno (ad es: 10 – 3 ci da 7; 12 – 3 ci da 9; 14 – 3 ci da 11 e così via: come si vede, ci sono chiaramente tutti i numeri dispari uguali o superiori a 7, cioè tutti i numeri coperti dal Teorema debole di Goldbach). - CVD

Considerazioni finali

Perché incaponirsi su questioni del genere? Ci sono buoni motivi per farlo.

L'obiettivo principale è quello di dimostrare quella che è nota come "Congettura di Lemoine-Levy", in base alla quale, per ogni numero numero dispari Nd uguale o superiore a 7 si ha che Nd = 2 Px + Py. A dir del vero, più nello specifico, l'intenzione sarebbe dimostrare una formulazione leggermente più forte di tale Congettura, quella per cui Nd = 2 P1 + P2.

1. Si tenga in mente che, se Nd = 2 Px + Py, allora Npa = 2 Px + Py + Pz: ciò aiuta ad uniformare l'Insieme G2, ed a trovare una formulazione anch'essa uniforme per le eventuali eccezioni alla Congettura di Goldbach;
2. Si tenga in mente che, se Nd = 2 P1 + P2, allora possiamo affermare che Npa = P1 + (2 P2 + 1), il che è affermazione più potente sia della precedente qui sopra esposta, ma soprattutto è affermazione anche più potente del Teorema di Chen.

Questo dovrebbe rendere chiaro il perché ci si incaponisca così tanto su questioni del genere.