Aldo Pappalepore
aldo.pappalepore@libero.it

Investigation of Hardy-Littlewood and of Goldbach conjectures with the primality theorems of Congruence and of Complementary Congruence

Indagine sulle congetture di Hardy-Littlewood e di Goldbach con i teoremi di primalità della Congruenza e della Congruenza Complementare

Abstract

This article provides novel insights on Hardy-Littlewood's conjecture (infinity and distribution of twin primes) and on Goldbach's conjecture; this work is primarily based on two primality theorems of congruence and of compcongruence. Study results in demonstration of Hardy-Littlewood and the Goldbach conjectures.The approach taken also opens up new areas of possible research in the field of Number Theory.

Nell'articolo viene sviluppato uno studio sulla congettura di Hardy-Littlewood (infinità e distribuzione dei primi gemelli) e sulla congettura di Goldbach; esso è basato prioritariamente su due teoremi di primalità della congruenza e della compcongruenza. Lo studio perviene alla dimostrazione delle congetture di Hardy-Littlewood e di Goldbach. Lo studio, oltre ai risultati raggiunti, apre nuovi ambiti di possibile ricerca nel campo della Teoria dei numeri.

1 Le primalità da Congruenza

1.1 La Congruenza dei numeri naturali

Come è noto la relazione di congruenza [1.2.1 di (a)] modulo m è una relazione di equivalenza definita sull'insieme dei numeri interi Z come segue: se m è un fissato numero intero maggiore di 1, due interi a e b si dicono congrui modulo m se m|(a – b); m è detto modulo della congruenza e la stessa si indica con a ≡ b (mod m).
Nel campo dei numeri naturali si può anche affermare in maniera equivalente che a ≡ b (mod m) se a e b danno lo stesso resto nella divisione intera per m.
Per esempio, 24 ≡ 10 (mod 7) perché entrambi danno resto 3 nella divisione intera per 7. Tutti i numeri congrui tra loro modulo m costituiscono una classe di equivalenza, detta classe di congruenza modulo m: due numeri naturali appartengono alla stessa classe di congruenza se e solo se sono congrui modulo m e cioè se e solo se divisi per m danno lo stesso resto r. Se, come nell'esempio, il modulo è 7, si vengono così a formare sette classi (tante quanti sono i possibili resti nella divisione per 7) così indicate: [0], [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Limitandoci sempre al sottoinsieme di Z costituito dai numeri naturali, per stabilire a quale classe modulo m appartiene uno di essi lo si divide per m, il resto indica la classe.
E' bene sottolineare come per ogni m si ha sempre che $[m]_{\text{mod m}} = [0]_{\text{mod m}}$.

Osservazione 1.1.2 Dalla Teoria dei Numeri sappiamo che un numero naturale qualsiasi n sarà non primo solo se divisibile per uno o più numeri primi minori o uguali della $\sqrt{n}$. Giacché tutti i numeri naturali pari, eccetto 2, sono non primi in quanto divisibili per 2, si può asserire che un numero naturale dispari qualsiasi n > 4 sarà non primo solo se divisibile per uno o più numeri primi dispari minori o uguali della $\sqrt{n}$.

Da qui in poi, le variabili p, p_1, p_2, ... p_i indicano sempre numeri primi e $\mathbb{P}(M)$ l'insieme dei numeri primi dispari minori o eguali del numero M.

1.2 Teorema della Primalità della Congruenza

Enunciato 1.2.1 *$\forall N_0, n_0 \in N$ con $N_0 \geq 3$, $0 \leq n_0 \leq N_0 - 3$ e pari se N_0 è dispari o viceversa, con $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0 - n_0)}\right)$ insieme dei numeri primi dispari $\leq \sqrt{(N_0 - n_0)}$, condizione necessaria e sufficiente affinché $N_0 - n_0$ sia un numero primo è che $n_0 \not\equiv N_0 (\mathrm{mod}\, p_i)$ $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0 - n_0)}\right)$ oppure che $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0 - n_0)}\right)$ sia un insieme vuoto.*

Dim. In base alla congruenza dei numeri naturali (1.1) se N_0 e n_0 non appartengono ad una stessa classe di congruenza modulo p_i per tutti gli $p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0 - n_0)}\right)$, questo vuol dire che $N_0 - n_0$ (numero naturale sempre dispari) non è divisibile per nessun numero primo dispari minore o uguale della $\sqrt{(N_0 - n_0)}$ e che quindi, in base all'osservazione (1.1.2), $N_0 - n_0$ è un numero primo. Se invece $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0 - n_0)}\right)$ risulta un insieme vuoto (con $n_0 = N_0 - 3$, $N_0 - 4$, $N_0 - 5$, $N_0 - 6$, $N_0 - 7$, $N_0 - 8$) il numero $N_0 - n_0$ non può essere diviso da nessun primo e quindi è primo.
Viceversa se $N_0 - n_0$ è un numero primo esso non sarà divisibile per nessun altro numero primo dispari inferiore, uguale o inesistente della $\sqrt{(N_0 - n_0)}$ e quindi N_0 ed n_0 risulteranno sempre non congrui $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0 - n_0)}\right)$.

Si è posto $n_0 \leq N_0 - 3$ in quanto con $n_0 = N_0 - 1$ si avrebbe che $N_0 - n_0 = 1$ che, come si sa, non è un numero primo e neanche uno composto, e con $n_0 = N_0 - 2$ si avrebbe che N_0 ed n_0 sarebbero entrambi pari o dispari contrariamente all'ipotesi. Al fine di evitare poi che n_0 possa assumere valori negativi deve risultare $N_0 \geq 3$.

Osservazione 1.2.2 *Se invece di riferirci all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\boldsymbol{N_0 - n_0})}\right)$ ci vogliamo riferire, per esigenze di dimostrazioni successive, all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{\boldsymbol{N_0}}\right)$, il teorema (1.2.1) si trasforma nel corollario (1.2.3)*

Dato un numero $N_0 \in N$, un numero $n_0 \in N$, minore di N_0 e tale che $(N_0 - n_0)$ sia dispari si chiama **Prisotto di N_0** se risulta che $n_0 \not\equiv N_0 (\mathrm{mod}\ p_i)$ $\forall\ p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$.

Corollario 1.2.3 *$\forall N_0, n_0 \in N$ con $N_0 \geq 9$, $0 \leq n_0 \leq N_0 - p_{max}$ e pari se N_0 è dispari o viceversa, con $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$ insieme dei numeri primi dispari $\leq \sqrt{(N_0)}$ e con p_{max} numero primo più alto di $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$, condizione necessaria e sufficiente affinché $N_0 - n_0$ sia un numero primo è che n_0 sia un numero prisotto di N_0.*

Dim. Sostituendo $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$ a $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0 - n_0)}\right)$, a differenza del teorema (1.2.1), i numeri n_0 minori di N_0 ed appartenenti all'intervallo $[N_0 - p_{max}., N_0 - 3]$ non vengono considerati in quanto presentano tutti almeno una classe di congruenza mod p_j, con $p_j \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$, uguale a quella di pari modulo di N_0. Infatti per gli $n_0 \in [N_0 - p_{max}., N_0 - 3]$, $N_0 - n_0$ apparterrà all'intervallo $[3, p_{max}]$ e quindi sarà uguale ad un numero primo o composto appartenente a questo intervallo; nel primo caso in base all' aritmetica modulare se $N_0 - n_0 = p_j$, con $p_j \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right) \subset [3, p_{max}.]$ questo implica che $[N_0]$ mod p_j – $[n_0]$ mod p_j = $[p_j]$ mod p_j = $[0]$ da cui la congruenza mod p_j di n_0 con N_0; se invece $N_0 - n_0$ è uguale ad un numero composto $m^* p_j$, con $p_j \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right) \subset [3, p_{max}.]$, si avrà che $[N_0]$ mod p_j – $[n_0]$ mod p_j = $[m]$ mod p_j * $[p_j]$ mod p_j = $[m]$ mod p_j *$[0]$ = $[0]$ da cui la congruenza mod p_j di n_0 con N_0.
Viceversa se $N_0 - n_0$ è un numero primo, appartenente all'intervallo $]\, p_{max}, N_0]$, esso in quanto primo non sarà divisibile per nessun altro numero primo dispari inferiore o uguale di p_{max} e quindi della $\sqrt{(N_0)}$ e pertanto N_0 ed n_0 risulteranno sempre non congrui $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$.

Si è posto $N_0 \geq 9$ in quanto per valori inferiori p_{max} non sarebbe definito.

In base al corollario 1.2.3 possiamo affermare che i numeri n_0 prisotto di N_0, sottratti ad N_0, danno come risultato tutti i numeri primi compresi nell'intervallo $]\, p_{max}, N_0]$.

Osservazione 1.2.4 *Ovviamente, a parità di N_0, la differenza tra l'insieme dei numeri incongrui minori di N_0 moduli $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\boldsymbol{N_0} - \boldsymbol{n_0})}\right)$ e quello dei numeri prisotto di N_0 è data da tutti gli $n_0 = N_0 - p_i$ con $p_j \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(\boldsymbol{N_0})}\right)$. In pratica il numero di tutti i primi dispari minori o uguali ad N_0 è pari alla somma del numero dei numeri prisotto di N_0 e di quello dei $p_j \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(\boldsymbol{N_0})}\right)$.*

Osservazione 1.2.5 *Sia il teorema (1.2.1) che il corollario (1.2.3) nulla ci dicono sulla esistenza di almeno un n_0 incongruo. In base però al postulato [6.3 di (b)] di Bertrand (dimostrato successivamente da Pafnuty Chebyshev, Srinivasa Ramanujan e Paul Erdős) che afferma che per ogni $n \geq 2$ esiste almeno un primo p tale che $n < p < 2n$, si può affermare, relativamente al corollario (1.2.3), che nell'intervallo $]\, p_{max}, N_0]$ esisterà sempre almeno un primo essendo $2\, p_{max} \leq 2\sqrt{N_0} \leq N_0$ per $N_0 \geq 4$. Conseguentemente nell'intervallo $]0, N_0 - p_{max}[$ esisterà sempre almeno un n_0 prisotto di N_0.*

1.3 La Compcongruenza dei numeri naturali

Introduciamo ora la **Congruenza Complementare** (compcongruenza) modulo m come la relazione di corrispondenza definita sull'insieme dei numeri interi Z come segue: se m è un fissato numero intero maggiore di 1, due interi a e b si dicono compcongrui modulo m se $m|(a + b)$; m è detto modulo della compcongruenza e la stessa la indicheremo con $a \parallel b \pmod m$.

Nel campo dei numeri naturali si può anche affermare in maniera equivalente che $a \parallel b \pmod m$ se a e b danno due resti complementari rispetto ad m nella divisione intera per m. Per esempio, $24 \parallel 39 \pmod 7$ perché danno come resti nella divisione intera per 7 rispettivamente 3 e 4, cioè due numeri complementari rispetto a 7.

1.4 Teorema della Primalità della Compcongruenza

Enunciato 1.4.1 *$\forall\, N_0, n_0 \in N$ con $N_0 \geq 2$, $0 \leq n_0 \leq N_0 - 1$ e pari se N_0 è dispari o viceversa, con $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0 + n_0)}\right)$ insieme dei numeri primi dispari $\leq \sqrt{(N_0 + n_0)}$, condizione necessaria e sufficiente affinché $N_0 + n_0$ sia un numero primo è che $n_0 \nparallel N_0 (mod\, p_i)$ $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0 + n_0)}\right)$ oppure che $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0 + n_0)}\right)$ sia un insieme vuoto.*

Dim. In base alla compcongruenza dei numeri naturali (1.3), se N_0 e n_0 **non** sono compcongrui modulo p_i per tutti gli p_i appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\boldsymbol{N_0} + \boldsymbol{n_0})}\right)$, questo vuol dire che $N_0 + n_0$ non è divisibile per nessun numero primo minore della $\sqrt{(\boldsymbol{N_0} + \boldsymbol{n_0})}$ e che quindi, in base all'osservazione (1.1.2), $N_0 + n_0$ è un numero primo. Se invece $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\boldsymbol{N_0} + \boldsymbol{n_0})}\right)$ risulta un insieme vuoto il numero $N_0 + n_0$ non può essere diviso da nessun primo e quindi è primo.
Viceversa se $N_0 + n_0$ è un numero primo esso non sarà divisibile per nessun altro numero primo dispari inferiore, uguale o inesistente della $\sqrt{(N_0 + n_0)}$ e quindi N_0 ed n_0 risulteranno sempre non compcongrui $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0 + n_0)}\right)$.

Si è posto $N_0 \geq 2$ in quanto con $N_0=1$ ed $n_0=0$ si avrebbe $N_0+n_0 =1$, numero non primo e non composto.

Osservazione 1.4.2 *Se invece di riferirci all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\boldsymbol{N_0} + \boldsymbol{n_0})}\right)$ ci vogliamo riferire, per esigenze di dimostrazioni successive, all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{\boldsymbol{2N_0}}\right)$ il teorema (1.4.1) si trasforma nel corollario (1.4.3).*

Assegnati cioè due numeri N_0, $n_0 \in N$, con $n_0 < N_0$ e tali che (N_0+n_0) sia dispari, se risulta che ogni numero primo dispari $p \leq \sqrt{(2N_0)}$ non divide il numero (N_0+n_0) vuol dire che lo stesso è primo.

Dato un numero $N_0 \in N$, un numero $n_0 \in N$, minore o uguale di N_0 e tale che (N_0+n_0) sia dispari si chiama **Prisopra di N_0**, se risulta che $n_0 \not\equiv N_0 (\text{mod } p_i)$ $\forall\, p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(2N_0)}\right)$.

Corollario 1.4.3 *$\forall\, N_0$, $n_0 \in N$ con $N_0 \geq 2$, $0 \leq n_0 \leq N_0-1$ e pari se N_0 è dispari o viceversa, con $\mathbb{P}\left(\sqrt{(2N_0)}\right)$ insieme dei numeri primi dispari $\leq \sqrt{(2N_0)}$, condizione necessaria e sufficiente affinché $N_0 + n_0$ sia un numero primo è che n_0 sia un prisopra di N_0.*

Dim. Estendendo l'insieme dei numeri primi del teorema (1.4.1) da $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\boldsymbol{N_0+n_0})}\right)$ **a** $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\boldsymbol{2N_0})}\right)$ ed indicando con $\mathbb{P}(\Delta 2N_0)$ l'insieme dei primi presenti in $\mathbb{P}\left(\sqrt{(2N_0)}\right)$ e non in $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0+n_0)}\right)$, nulla cambia in quanto per ognuno dei numeri n_0 (incompcongrui con N_0 moduli $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0+n_0)}\right)$ tali che $N_0+n_0=p_j$, con p_j appartenente all'intervallo $[N_0,2N_0]$, non potrà mai verificarsi che n_0 è compcongruo con N_0 moduli $\mathbb{P}(\Delta 2N_0)$, e cioè che $[N_0]_{mod\, p_i}+[n_0]_{mod\, p_i}=[0]_{mod\, p_i}$, per almeno un $p_i \in \mathbb{P}(\Delta 2N_0)$**.** Infatti, tenendo presente che $\sqrt{2N_0} \leq N_0$ con $N_0 \geq 2$ e che quindi tutti i primi p_i appartenenti all'insieme $\mathbb{P}(\Delta 2N_0)$ sono $\leq N_0$ si ha che per ogni p_j appartenente all'intervallo $[N_0,2N_0]$ risulta $[p_j]_{mod\, p_i} \neq [0]$ essendo sempre p_i *e* p_j due numeri primi e diversi tra loro. Di conseguenza per ognuno dei numeri n_0 tali che $N_0+n_0=p_j$, poiché in base all'aritmetica modulare risulta sempre $[N_0]$ mod p_j + $[n_0]$ mod p_j = $[p_j]_{mod\, p_i}$ e quest'ultimo è sempre diverso da zero, si può affermare che n_0 è prisopra di N_0.
Viceversa se $N_0 + n_0$ è un numero primo esso non sarà divisibile per nessun altro numero primo dispari inferiore, uguale o inesistente della $\sqrt{(2N_0)}$ e quindi N_0 ed n_0 risulteranno sempre non compcongrui $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(2N_0)}\right)$.

Osservazione 1.4.4 *Sia il teorema (1.4.1) che il corollario (1.4.3) nulla ci dicono sulla esistenza di almeno un n_0 prisopra di N_0. Ma in base al postulato di Bertrand [6.3 di (b)] si può affermare che nell'intervallo $[N_0, 2N_0]$ esisterà sempre almeno un primo e conseguentemente nell'intervallo $]0, N_0]$ esisterà sempre almeno un n_0 prisopra di N_0.*

1.5 I numeri e le loro classi di congruenza

La Teoria dei Numeri ci dice che così come esiste nei sistemi numerici posizionali (p.es. quello decimale) una corrispondenza biunivoca tra tutti i numeri possibili esprimibili con n cifre (e quindi appartenenti all'intervallo $]0, 10^n -1]$) e tutte le possibili combinazioni (10^n) delle 10 cifre, analogamente esiste una corrispondenza biunivoca tra tutti i numeri dell'intervallo $]0, p_{max}\#]$, con p_{max} primo qualsiasi e $p_{max}\#$ il suo primoriale, e le combinazioni delle classi di congruenza di questi numeri aventi per modulo i singoli numeri primi minori ed uguali a p_{max}. L'esistenza di questa corrispondenza biunivoca è facilmente dimostrabile ricorrendo al Teorema Cinese del Resto [2.3.3 di (b)] ed inserendo come moduli del sistema di equazioni p_{max} e tutti i primi minori di esso.

Osservazione 1.5.1 Chiameremo **Tabella numeri-classi $\boldsymbol{p_{max}}$** la tabella che ad ogni numero dell'intervallo $]0, p_{max}\#]$ associa la combinazione delle classi di congruenza di questo numero aventi per modulo i singoli numeri primi minori ed uguali a p_{max}.

A scopo esemplificativo consideriamo (vedi appendice A) una **tabella numeri-classi** 7 contenente per ogni numero la corrispondente combinazione delle sue 4 classi di congruenza mod 2, mod 3, mod 5 e mod 7.
In questa tabella si può verificare la corrispondenza biunivoca suddetta. Per es. alla combinazione 1-

2-2-3 delle classi di congruenza mod 2, mod 3, mod 5 e mod 7 corrisponde solo il numero 17 nell'intervallo [1, 210] così come al numero 151 corrisponde solo la combinazione 1-1-1-4 delle stesse classi di congruenza sempre nell'intervallo [1, 210].

Come vedremo in seguito la Tabella numeri-classi p_{max} viene introdotta in questo studio per poter calcolare le densità dei numeri prisotto e prisopra di N_0.

1.6 Dalla Tabella numeri-classi p_{max} alle Primalità

C'è un criterio per desumere dalla Tabella numeri-classi p_{max} e dalle informazioni in essa contenute quanti sono, oltre ai moduli {2,3,…..,. p_{max}} su cui la tabella è costruita, i numeri primi minori o uguali ad un qualsiasi $N_0 \in]0, p_{max}\#]$ e quelli compresi nell'intervallo [N_0, 2 N_0] ?

Osservazione 1.6.1 *Tra i diversi criteri possibili quello che ci interessa per le nostre dimostrazioni successive consiste nell'applicazione del corollario (1.2.3) della Primalità della Congruenza e di quello (1.4.3) della Primalità della Compongruenza in base ai quali il numero dei primi dispari minori o uguali ad N_0 è, a meno dei primi minori della $\sqrt{(\boldsymbol{N_0})}$ e cioè i moduli {2,3,…..,. p_{max}} su cui è costruita la tabella, uguale a quello dei numeri della tabella prisotto di N_0 mentre il numero dei primi presenti nell'intervallo* [N_0, 2 N_0] è uguale a quello dei numeri prisopra di N_0.

Da questa osservazione discende che per ricavare dalla tabella numeri-classi p_{max} i numeri primi minori o uguali di N_0 utilizzando il criterio della Primalità della Congruenza bisogna imporre una condizione che lega N_0 alla tabella numeri-classi p_{max} e cioè che i moduli della tabella devono essere esattamente tutti i primi minori o uguali della $\sqrt{(N_0)}$.

Nel caso della nostra tabella esemplificativa [1, 210] possiamo affermare che soltanto per gli N_0 tali che $7 \leq \sqrt{(N_0)} < 11$ e cioè per gli N_0 maggiori o uguali di 49 e minori di 121 possiamo dire che i numeri della tabella n_0 prisotto di N_0 sono tali per cui N_0 - n_0 è un numero primo.

Analogamente per desumere dalla tabella-intervallo $]0, p_{max}\#]$ e dalle informazioni in essa contenute quanti sono i numeri primi presenti nell'intervallo [N_0, 2N_0] con $N_0 \in]0, p_{max}\#]$ utilizzando il criterio (corollario 1.4.3) della Primalità della Compcongruenza bisogna imporre che i moduli {2,3,…..,. p_{max}} della tabella siano esattamente tutti i primi minori o uguali della $\sqrt{(2N_0)}$. Con questa condizione si avrà che i numeri della tabella incompcongrui minori di N_0 sono prisopra di N_0 e cioè tali per cui N_0 + n_0 è un numero primo.

Nel caso della nostra tabella [1, 210] per esempio possiamo affermare che soltanto per gli N_0 tali che $7 \leq \sqrt{(2N_0)} < 11$ e cioè per gli N_0 maggiori o uguali di 25 e minori di 61 possiamo dire che i numeri n_0 incompcongrui minori di N_0 sono prisopra di N_0 e cioè che sommati ad N_0 danno i numeri primi dell'intervallo [N_0, 2N_0].

1.7 Da N_0 ai primi dell'intervallo]0, 2N_0]

Se allora, fissato un qualsiasi $N_0 \in N$ maggiore di 49, vogliamo individuare quanti sono i numeri primi minori o uguali ad N_0 occorre trovare innanzitutto il più alto numero primo p_{max} minore o uguale della $\sqrt{(N_0)}$ e considerare poi la tabella numeri-classi p_{max} $]0, p_{max}\#]$, dove $p_{max}\#$ è il primoriale di p_{max} e corrisponde al prodotto dei numeri primi $\leq p_{max}$ *Poiché il primoriale $p_{max}\#$ coincide col primoriale $\sqrt{(\boldsymbol{N_0})}\#$ nel prosieguo dello studio scriveremo indifferentemente $]0, p_{max}\#]$ o $]0, \sqrt{(\boldsymbol{N_0})}\#]$ per indicare la stessa* Tabella numeri-classi p_{max}.

Osservazione 1.7.1 *La condizione che N_0 sia maggiore o eguale di 49 deriva dalla necessità che N_0*

appartenga all'intervallo]0, p_{max}#].

Per quanto scritto nell'osservazione (1.6.1) il numero di primi minori o uguali di N_0 ci è dato, a meno dei primi minori della $\sqrt{(\boldsymbol{N_0})}$ e cioè i moduli 2, 3, ….., p_{max} su cui è costruita la tabella, da quello dei numeri della tabella prisotto di N_0**,** numero che in base all'osservazione (1.2.5) sarà sempre uguale o maggiore di 1.

Per es. con N_0 = 315 si avrà che $\sqrt{315}$=17,746 e quindi p_{max} sarà uguale a 17, p_{max}# (2*3*5*7*11*13*17) sarà uguale a 510510 ed al numero 315 corrisponderà, nell'intervallo [0 , p_{max}#], una ed una sola combinazione delle sue classi di congruenza mod 2, mod 3, mod 5, mod 7, mod 11, mod 13 e mod 17. Tutti gli n_0 minori di N_0 ed incongrui con esso relativamente agli $p_i \leq p_{max}$, cioè tutti gli n_0 prisotto di N_0, sottratti ad N_0 danno come risultato tutti i numeri primi minori di N_0**,** ad eccezione dei primi 2,3,5,7,11,13,17 su cui è costruita la tabella. Invece in base al corollario (1.2.3) ed all'osservazione (1.6.1), nulla si può dire circa gli altri numeri della tabella m_0 magggiori di 315 ed incongrui con esso moduli p_i appartenenti a $\mathbb{P}\left(\sqrt{(315)}\right)$.

Analogamente se vogliamo individuare, attraverso una tabella numeri-classi p_{max}, quanti sono i numeri primi presenti nell'intervallo [N_0, $2N_0$] con qualsiasi $N_0 \geq 121$, occorre trovare innanzitutto il più alto numero primo p_{max} minore della $\sqrt{2N_0}$ e considerare quindi la tabella numeri-classi p_{max}]0, $\sqrt{(2\boldsymbol{N_0})}$#]. Anche qui la condizione che N_0 sia maggiore o eguale di 121 deriva dalla necessità che $2N_0$ appartenga all'intervallo]0, $\sqrt{(2\boldsymbol{N_0})}$#]. Per quanto scritto nell'osservazione (1.6.1) il numero di primi presenti nell'intervallo [N_0, $2N_0$] ci è dato da quello dei numeri della tabella prisopra di N_0, numero che in base all'osservazione (1.4.4) sarà sempre uguale o maggiore di 1.

Se si mantiene l'esempio precedente di N_0 = 315, occorre in questo caso calcolare la $\sqrt{2 * 315}$ che è 25,1, da cui discende che p_{max} sarà uguale a 23, $\sqrt{(2\boldsymbol{N_0})}$# (uguale a 2*3*5*7*11*13*17*19*23) sarà uguale a 223092870 ed al numero 315 corrisponderà, nell'intervallo]0, $\sqrt{(2\boldsymbol{N_0})}$#], una ed una sola combinazione delle sue classi di congruenza mod 2, mod 3, mod 5, mod 7, mod 11, mod 13, mod 17, mod 19, mod 23. Tutti gli n_0 minori di N_0 ed incompcongrui con esso, cioè tutti gli n_0 prisopra di N_0, sommati ad N_0 daranno come risultato tutti i numeri primi compresi nell'intervallo [N_0**, 2** N_0]. Invece in base al corollario (1.4.3) ed all'osservazione (1.6.1), nulla si può dire circa gli altri numeri della tabella m_0 maggiori di 315 ed incompcongrui con esso moduli $\mathbb{P}\left(\sqrt{(315)}\right)$.

2 La distribuzione dei numeri primi

2.1 Il Teorema fondamentale dei numeri primi

La Congettura di Gauss, risalente al 1792 e poi diventato Teorema dei Numeri Primi (TNP), sulla distribuzione dei numeri primi è:

(2.1.1) $\pi(N) \approx \frac{N}{logN} \approx \int_2^N \frac{dt}{logt} \approx Li(N)$

dove $\pi(N)$ è il numero dei primi minori o uguali ad N.

Questa congettura fu dimostrata per la prima volta nel 1986 da Hadamard e de La Vallée Poussin utilizzando metodi della teoria delle funzioni complesse legati alle proprietà della funzione ζ di Riemann. I matematici del tempo, ed in particolare G. H. Hardy, ritenevano che l'analisi complessa era necessariamente coinvolta nel Teorema e che metodi con sole variabili reali erano da considerare inadeguati. Ma nel 1949 Erdös e Selberg [3.4 di (a)] pubblicano indipendentemente una dimostrazione elementare (cioè con sole variabili reali), basata sulla tecnica combinatoria, del Teorema dei numeri primi.

La dimostrazione di Selberg - Erdős [3.4 di (a)] ha messo quindi in gioco la presunta superiorità (profondità) dell'analisi complessa per la dimostrazione del TNP, mostrando che anche i metodi tecnicamente elementari, che abbiamo adottato anche in questo studio, hanno la loro efficacia dimostrativa.

2.2 La densità media degli n_0 incongrui di N_0 nella tabella]0, $\sqrt{(N_0)}$#]

Fissato un qualsiasi $\boldsymbol{N_0} \in \boldsymbol{N}$ maggiore di 49, consideriamo (vedi par. 1.6 ed 1.7) la relativa tabella numeri-classi p_{max} dell'intervallo]0, p_{max} #], dove p_{max} è il più alto numero primo minore o uguale della $\sqrt{(N_0)}$, e calcoliamo il numero di tutti (maggiori e minori di N_0) gli n_0 incongrui di N_0 presenti in tabella.

Eliminiamo allora da questa tabella le righe che presentano una o più classi di congruenza dei moduli p_i (2, 3, 5, ….. , p_{max}) uguali alla classe corrispondente al resto di N_0 per gli stessi moduli.

I numeri M della tabella, non eliminati attraverso il precedente crivello, possono essere allora solo quelli che nella tabella numeri-classi p_{max} presentano per ogni $p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$ una delle p_i -1 possibili classi di congruenza diverse da quella corrispondente di N_0. (se per es. (N_0) mod7 = 3, (M) mod7 dovrà essere eguale ad una delle 6 (7-1) possibili altre classi di congruenza: 0,1,2,4,5,6)

Le righe della tabella non cancellate allora, in base al calcolo combinatorio, risulteranno essere:

(2.2.1) $\prod_{p=2}^{p_{max}}(p-1)$

La (2.2.1) ci fornisce quindi la quantità di tutti i numeri **M** della tabella **incongrui (minori e maggiori) di N_0 per i soli moduli p_i** appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$.

Calcoliamo ora la **densità media** $\mathbf{Dnc}_{]0,\sqrt{N_0}\#]}$ di questi numeri M esistenti nell'intervallo]0, $\sqrt{(N_0)}$ #] con $\sqrt{(N_0)}$ # = 2*3*…….*p_{max}, si può scrivere:

(2.2.2) $\mathrm{Dnc}_{]0,\sqrt{N_0}\#]} = \frac{\prod_{p=2}^{p_{max}}(p-1)}{2*3*\ldots*pmax} = \frac{\prod_{p=2}^{p_{max}}(p-1)}{\prod_{p=2}^{p_{max}} p} = \prod_{p=2}^{p_{max}} \frac{(p-1)}{p}$

[*formula questa che moltiplicata per* $\sqrt{(N_0)}$ # *corrisponde alla funzione di Eulero* $\varphi(n)$ *con n=*$\sqrt{(N_0)}$ #, *e fornisce il numero di coprimi minori di* $\sqrt{(N_0)}$ #, *numero che comprende anche quello dei primi minori di* N_0 *eccezion fatta per i primi appartenenti all'insieme* $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$]

In base al corollario (1.2.3) della Primalità della Congruenza ed al fatto che tutti i numeri M minori di N_0 ($\mathbf{M_{N0}}$) sono **prisotto di N_0**, possiamo affermare che, per ognuno di questi numeri M_{N0}, N_0-M_{N0} è un numero primo e che la densità media $Dnc_{]0,N_0]}$ 1) degli M_{N0} nell'intervallo]0, N_0] ci è data da:

(2.2.3) $Dnc_{]0,N_0]} = \frac{Q(M_{N0})}{N_0}$ indicando con $Q(M_{N0})$ il numero degli M_{N0} presenti nell'intervallo]0, N_0].

Come da osservazione (1.2.4) il numero di **tutti** i primi $\pi(N_0)$ minori o eguali ad N_0 è dato dalla somma del numero degli M_{N0} e di quello di tutti i $p_j \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$ che, come sappiamo, non rientrano tra gli N_0 - M_{N0}.

Sappiamo poi dal TNP (2.1) che la densità media $Dprimi_{N0}$ dei numeri primi minori di N_0, che coincide, a meno degli p_i appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$, con la densità media Dnc_{N0} dei numeri M_{N0} **prisotto di N_0** ci è data da:

$$(2.2.4) \quad Dprimi_{]0,N_0]} \; = \frac{\pi(N_0)}{N_0} = \frac{1}{logN_0} \approx Dnc_{]0,N_0]}$$

Per la densità $Dprimi_{N0}$ bisogna cioè considerare, oltre ai numeri M_{N0} minori di N_0 ed incongrui con esso, anche gli pi appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$ e conseguentemente risulta sempre $Dprimi_{N0} > Dnc_{N0}$. Calcoliamo allora l'errore che si compie ponendo Dprimi = Dnc_{N0} . In base al TNP (2.1) si può scrivere:

$$(2.2.5) \quad Dnc_{]0,N_0]} = \frac{\left(\frac{N_0}{logN_0} - \frac{\sqrt{N_0}}{log\sqrt{N_0}}\right)}{N_0} \qquad \text{e} \qquad Dprimi_{]0,N_0]} = \frac{1}{logN_0}$$

Osservazione 2.2.6 *Accertato che risulta sempre* $Dprimi_{]0,N_0]} > Dnc_{]0,N_0]}$ *si può facilmente calcolare che l'errore percentuale che si commette nel porre* $Dprimi_{]0,N_0]} = Dnc_{]0,N_0]}$ *è del 20% per $N_0 = 10^2$, del 2% per $N_0 = 10^4$, dello 0,02% per $N_0 = 10^8$ e che esso è via via decrescente per valori crescenti di N_0.*

3 La dimostrazione della congettura di Hardy-Littlewood

3.1 I numeri Pari Gemelli

Ogni numero primo maggiore di 2, come del resto ogni numero dispari, può essere scritto come la somma o la differenza di un numero pari e di 1. Nel caso di una coppia di primi gemelli ci sarà ovviamente un unico numero pari che sommato a 1 e sottratto di 1 darà luogo ai primi gemelli della coppia.

Chiamiamo Pari Gemello ed indichiamo con il simbolo PG ogni numero pari n ∈ N tale che n+1 ed n-1 siano due numeri primi.

3.2 Il teorema dei Pari Gemelli

Definizione 3.2.1 *∀ $n_0 \in N$, pari e maggiore di 4, con $\mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$ insieme dei numeri primi dispari $\leq \sqrt{(n_0+1)}$, condizione necessaria e sufficiente affinché n_0+1 ed n_0-1 siano primi gemelli è che $n_0 \not\equiv 1(mod\, p_i)$ ed $n_0 \nparallel 1(mod\, p_i)$ $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$ oppure che $\mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$ sia un insieme vuoto.*

DIM. Dai due teoremi di Primalità (1.2.1) ed (1.4.1), ponendo $N_0 = n_0$ ed $n_0 = 1$ discende che, se 1 é incongruo ed incompcongruo con n_0 moduli p_i $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$, e di conseguenza $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0-1)}\right)$ essendo $\mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0-1)}\right) \subseteq \mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$, oppure se $\mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$ è un insieme vuoto, n_0+1 ed $n_0 - 1$ sono primi gemelli.
Viceversa se $n_0 + 1$ ed $n_0 - 1$ sono primi gemelli vuol dire che non sono divisibili per nessun primo minore o uguale della $\sqrt{(n_0+1)}$ e che quindi, sempre per la (1.2.1) ed (1.4.1), n_0 ed 1 sono incongrui ed incompcongrui $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$ e quindi $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0-1)}\right)$.

Si è posto $n_0 \geq 4$ in quanto con $n_0 = 2$ si avrebbe che $n_0 - 1 = 1$ che, come si sa, non è un numero primo e neanche uno composto.

Se invece di riferirci all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$ ci riferiamo, per esigenze di dimostrazioni successive, all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{N_0}\right)$ con $N_0 \in N$ e maggiore di n_0, il teorema (3.2.1) si trasforma nel seguente corollario:

Corollario 3.2.2 *$\forall N_0, n_0 \in N$, con $N_0 \geq 9$ e con n_0 pari e $p_{max} < n_0 < N_0$, con $\mathbb{P}\left(\sqrt{N_0}\right)$ insieme dei numeri primi dispari $\leq \sqrt{(N_0)}$ e con p_{max} numero primo più alto di $\mathbb{P}\left(\sqrt{N_0}\right)$, condizione necessaria e sufficiente affinché n_0+1 ed n_0-1 siano primi gemelli è che 1 sia un numero incongruo ed incompcongruo di n_0.*

Dim. Sostituendo $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$ a $\mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$ i numeri n_0 pari minori di p_{max} e tali che $n_0 \pm 1 = p_j$, con $p_j \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$, non vengono considerati in quanto, per lo stesso $p_j \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$, presentano una classe di congruenza mod p_j uguale e/o complementare a quella di pari modulo di 1. Infatti se $n_0 \pm 1 = p_j$ in base all'aritmetica modulare si avrà sempre che $[n_0]$ mod $p_j \pm [1]$ mod $p_j = [p_j]$ mod $p_j = [0]$ da cui discende la congruenza e/o la compcongruenza mod p_j di 1 con n_0.
Viceversa se $n_0 + 1$ ed $n_0 - 1$ sono primi gemelli maggiori di p_{max} e minori di N_0 vuol dire sia che, in base alla (1.2.1) ed alla (1.4.1), n_0 ed 1 sono incongrui ed incompcongrui $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0 \pm 1)}\right)$, ma anche che, non essendo $n_0 + 1$ ed $n_0 - 1$, in quanto primi, divisibili per nessun primo minore o uguale della $\sqrt{(N_0)}$, n_0 ed 1 sono incongrui ed incompcongrui anche $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$.
Si è posto $N_0 \geq 9$ in quanto per valori inferiori p_{max} non sarebbe definito.

Giacché nell'intervallo $]0, N_0]$, con $N_0 \geq 9$ ed $n_0 > p_{max}$ esiste sempre almeno un primo (osservazione 1.2.5), sicuramente esisteranno sempre un n_{01} ed un n_{02} di cui 1 è incongruo ed incompcongruo; ma per dimostrare la congettura di Hardy-Littlewood [1 di (c)] bisogna appurare sia che esiste almeno un $n_0 = n_{01} = n_{02}$, e cioè un numero Pari Gemello (PG), minore di N_0, di cui 1 è incongruo ed incompcongruo modulo p_i per tutti gli p_i appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\boldsymbol{N_0})}\right)$, sia che per $N_0 \to \infty$ anche il numero di PG tende ad infinito con una relazione ben precisa.
A tal fine ricorriamo allo studio della densità dei pari gemelli.

3.3 La densità dei pari gemelli

Tutti gli n_0 che soddisfano le condizioni del corollario (3.2.2) sono pari gemelli PG che presentano le seguenti caratteristiche:

- la classe di PG modulo 2, essendo PG pari, è sempre uguale a zero mentre la classe di 1 modulo 2 è sempre 1 (con complemento pari a 1) e di conseguenza 1 sarà sempre incongruo ed incompcongruo con PG modulo 2
- le classi di PG di modulo successivo (3, 5, 7, 11, etc.) presenti in $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$ non devono essere uguali alle classi di 1 ed ai loro complementi p-1 dello stesso modulo (*per esempio se PG=18 ed $N_0 = 24$ si ha che $\mathbb{P}(\sqrt{N_0}) = \{3\}$; $[18]_{mod3} = 0$ e il suo complemento è ancora uguale a 0, $[1]_{mod3} = [1]$ e il suo complemento è uguale a 2 e pertanto 1 risulta incongruo ed incompcongruo con PG per cui 18+1 e 18-1 risultano primi gemelli*).

Ciò detto vediamo come calcolare il numero dei PG e quindi delle coppie di pari gemelli minori di un $N_0 \geq 49$, condizione questa (vedi osservazione 1.7.1) derivante dalla necessità che N_0 appartenga all'intervallo $]0, p_{max}\#]$ dove p_{max} è il numero primo più alto minore o uguale della $\sqrt{(N_0)}$ (1.5).

Selezionato allora un $N_0 \geq 49$ qualsiasi indichiamo con p_{max} il numero primo più alto di $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$. Consideriamo quindi l'intervallo/tabella dei numeri naturali]0, p_{max}#] ed eliminiamo ora da questa tabella le righe che presentano: classe di congruenza mod 2 uguale a [1]; classi di congruenza dei moduli successivi (3, 5, ….. , p_{max}) uguali alle classi di 1 ed ai loro complementi p-1 per gli stessi moduli.
I numeri **M** della Tabella numeri-classi p_{max}, non eliminati attraverso il precedente crivello, possono essere allora solo quelli che nella loro corrispondente combinazione di classi di congruenza presentano la sola classe [0] delle due possibili classi di congruenza mod 2 ed una delle p_i -2 (per ogni p_i appartenente all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$) possibili classi di congruenza dei moduli successivi (3, 5, ….. , p_{max}) con l'esclusione cioè delle classi di 1 e dei loro complementi per gli stessi moduli (se per es. (M) mod7 = 1 con complemento = 6, M non sarà un Pari Gemello essendo anche (1) mod7=1 con complemento = 6; per esserlo è necessario che (M) mod7 sia uguale ad una delle 5 (7-2) possibili altre classi di congruenza: 0,2,3,4,5)

Le righe (combinazioni di classi) della tabella non cancellate allora, in base al calcolo combinatorio, risulteranno essere:

(3.3.1) $\prod_{p=3}^{p_{max}}(p-2)$

La (3.3.1) ci fornisce quindi la quantità dei numeri **M** della tabella-intervallo]0, p_{max}#] dei quali 1 **non è congruo e non è compcongruo per i soli moduli p_i** appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$ e nulla possiamo dire circa la eventuale (non) congruenza e (non) compcongruenza di 1 con questi numeri relativamente agli altri moduli p_j maggiori di p_{max} ed appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\text{pmax\#})}\right)$. In base al corollario (3.2.2) possiamo quindi affermare che tutti i numeri **M(PG) minori di N_0**, essendo non congrui e non compcongrui con 1 per tutti i moduli p_i appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$, sono numeri Pari Gemelli (PG).

Osservazione 3.3.2 *Per lo stesso corollario (3.2.2) sappiamo però anche che tali numeri M(PG), di cui 1 non è congruo e non è compcongruo relativamente ai moduli* $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$, *non comprendono i PG relativi alle coppie di primi gemelli minori della* $\sqrt{N_0}$ *e conseguentemente la loro densità media* $Dncncomp(PG)_{N0}$ *sarà sempre minore di quella* Dpg_{N0} *di tutti i Pari Gemelli* PG_{N0} *minori di N_0.*

Calcoliamo ora la densità media $Dncncomp_{]0,\ p_{max}\#]}$ dei numeri PG esistenti nell'intervallo]0, p_{max}#] di cui 1 è non congruo e non compcongruo per i moduli p_i appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$. Sapendo che $p_{max}\# = 2*3*\ldots\ldots* p_{max}$, si può scrivere:

$$(3.3.3)\quad Dncncomp_{]0,\ p_{max}\#]} = \frac{\prod_{p=3}^{pmax}(p-2)}{\prod_{p=2}^{pmax}p} = \frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax}\frac{(p-2)}{p}$$

moltiplicando e dividendo il secondo termine della stessa per (p-1) otteniamo:

$$(3.3.4) Dncncomp_{]0,\ p_{max}\#]} = \frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax}\frac{(p-2)}{p} * \frac{(p-1)}{(p-1)} = \frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax}\frac{(p-1)}{p} * \prod_{p=3}^{pmax}\frac{(p-2)}{(p-1)} = \prod_{p=2}^{pmax}\frac{(p-1)}{p} * \prod_{p=3}^{pmax}\frac{(p-2)}{(p-1)}$$

nell'ultimo membro della (3.3.4) abbiamo sostituito a $\frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax}\frac{(p-1)}{p}$ il termine $\prod_{p=2}^{pmax}\frac{(p-1)}{p}$ che, come sappiamo dalla (2.2.2), corrisponde, sempre per $N_0 \geq 49$, alla Densità media $Dnc_{]0,\ \sqrt{N_0}\#]}$ dei numeri M esistenti nell'intervallo]0, p_{max}#] **non congrui di N_0 per i soli moduli p_i** appartenenti

all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$; in queste ultime tre formule p_{max} è il numero primo più alto minore o uguale della $\sqrt{(N_0)}$.
Vediamo allora se riusciamo a trovare una relazione tra $\prod_{p=3}^{pmax}\frac{(p-2)}{(p-1)}$ e $\prod_{p=2}^{pmax}\frac{(p-1)}{p}$ in modo da poter determinare il valore di $Dncncomp_{]0,\ p_{max}\#]}$ in funzione di $Dnc_{]0,\ \sqrt{N_0}\#]}$.

Possiamo scrivere:

(3.3.5) $\frac{\prod_{p=3}^{pmax}\frac{(p-2)}{(p-1)}}{\prod_{p=2}^{pmax}\frac{(p-1)}{p}} = \prod_{p=3}^{pmax}\frac{(p-2)}{(p-1)} * \prod_{p=2}^{pmax}\frac{p}{(p-1)} = \prod_{p=3}^{pmax}\frac{(p-2)}{(p-1)} * 2 * \prod_{p=3}^{pmax}\frac{p}{(p-1)} = 2 * \prod_{p=3}^{pmax}\frac{p*(p-2)}{(p-1)^2}$

dove si può facilmente verificare che il rapporto tra il termine $\prod_{p=3}^{pmax}\frac{(p-2)}{(p-1)}$ e quello $\prod_{p=2}^{pmax}\frac{(p-1)}{p}$ per N_0=49 assume il valore 0,68359375, per N_0=9006001 il valore 0,6601862196 per poi, al crescere di N_0 verso infinito, e quindi estendendo il prodotto su tutti i numeri primi ≥ 3, tendere rapidamente a decrescere verso la costante dei primi gemelli C_2 che compare nella congettura di Hardy-Littlewood sulla distribuzione dei primi gemelli:

$\prod_{p\geq 3}\frac{p*(p-2)}{(p-1)^2}$ = $C_2 \approx$ 0,6601611813846869573927812110014 ………

Possiamo quindi scrivere:

(3.3.6) $\prod_{p=3}^{pmax}\frac{(p-2)}{(p-1)} \approx 2*C_2*\prod_{p=2}^{pmax}\frac{(p-1)}{p}$

che sostituita nella (3.3.4) ci dà:

$Dncncomp(PG) \approx \prod_{p=2}^{pmax}\frac{(p-1)}{p} * \prod_{p=3}^{pmax}\frac{(p-2)}{(p-1)} \approx 2*C_2*\left(\prod_{p=2}^{pmax}\frac{(p-1)}{p}\right)^2$

da cui in base alla (2.2.2):

(3.3.7) $Dncncomp(PG)_{]0,\ p_{max}\#]} \approx 2*C_2*\left(Dnc_{]0,\ \sqrt{N_0}\#]}\right)^2$

In questa relazione che lega $Dncncomp(PG)_{]0,\ p_{max}\#]}$ al quadrato di $Dnc_{]0,\ \sqrt{N_0}\#]}$ la costante C_2 cambia poco al variare di N_0 e quindi al variare di $p_{max}\#$. Il crivello che determina la densità $Dncncomp_{(PG)]0,\ p_{max}\#]}$ infatti non dipende né da N_0 né da p_{max} # ma solo dalla incongruenza ed incompcongruenza di 1 con un n_0=PG $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0 \pm 1)}\right)$.
Si può quindi scrivere con buona approssimazione:

(3.3.8) $Dncncomp_{(PG)]0,\ N_0]} \approx 2*C_2*\left(Dnc_{]0,N_0]]}\right)^2$

Osservazione 3.3.9 *Nella (3.3.8) come riportato nelle Osservazioni (3.3.2) e (2.2.6) sia* $Dncncomp_{(PG)]0,\ N_0]}$ *che* $Dnc_{]0,N_0]]}$ *non comprendono i possibili n_0 per i quali $n_0 \pm 1$ sono uguali ai primi minori o uguali alla $\sqrt{(N_0)}$ ma giacché questa relazione è sempre valida $\forall N_0 \in N$ a partire da N_0 = 49 possiamo estendere la (3.3.8) a tutti i numeri n_0 di cui 1 risulta non congruo e non compcongruo e che sommati o sottratti ad 1 danno come risultato i primi (ad eccezione di 2, 3, 5, 7) minori a qualsiasi N_0 maggiore di 49. Infatti per N_0 = 49 (e quindi $\sqrt{49}$ = 7) la (3.3.8)* riguarda tutti gli n_0 di cui 1 è *non congruo e non compcongruo* che sottratti e sommati ad 1 danno come risultato i primi gemelli compresi tra *tra 8 e 49; per* $N_0 = 121$ *(e quindi* $\sqrt{121} = 11$*) la (3.3.8) riguarda i primi gemelli compresi tra 12 e 121; per* $N_0 = 169$ *(e quindi* $\sqrt{169} = 13$*) la (3.3.8) riguarda i primi gemelli compresi tra 14 e 169; e possiamo continuare così per tutti i successivi* N_0 *uguali ai quadrati dei primi successivi a 13.*

Ma si può verificare, ponendo N_0=49 e quindi C_2=0,6835, che la (3.3.8) con una approssimazione di circa il 5%, sussiste anche prendendo in considerazione i primi 2, 3, 5, 7. Infatti con N_0=49 si contano 15 primi e 6 pari gemelli donde la (3.3.8) diventa:

$$\frac{6}{49} \approx 2*0{,}6835*\left(\frac{15}{49}\right)^2$$

$$0{,}1224 \approx 0{,}1281$$

Ovviamente al crescere di N_0, ferma restando la validità della (3.3.8) per tutti i primi maggiori di 7, l'approssimazione diminuisce.
In definitiva possiamo allora ritenere che $\forall\ N_0 \in N$ maggiore di 49 la (3.3.8) è valida per tutti i primi minori di N_0 e quindi, sostituire Dpg_{N0} al posto di Dncn[e $Dprimi_{]0,N_0]}$ al posto di $Dnc_{]0,N_0]}$, scrivendo:

(3.3.10) $Dpg_{N0} \approx 2*C_2*(Dprimi_{]0,N_0]})^2$

Essendo poi per il TNP $Dprimi_{]0,N_0]} = \frac{1}{logN_0}$ si può scrivere:

(3.3.11) $Dpg_{N0} \approx 2*C_2*(\frac{1}{logN_0})^2$

e moltiplicando ambo i membri per N_0:

(3.3.12) $PG_{N0} \approx N_0*2*C_2*(\frac{1}{logN_0})^2$

In appendice C è riportato un esempio di n_0 di cui 1 è prisotto e prisopra e dei relativi valori di $Dnc_{]0,N_0]}$, $Dncncomp_{]0,N_0]}$ ed PG_{NO} verificati e calcolati.

Per $N_0 = 49$ la (3.3.12) PG_{N0} assume un valore maggiore di 5 ed, essendo $N_0*(\frac{1}{logN_0})^2$ una funzione crescente con N_0, PG_{N0} crescerà sempre al crescere di N_0 tendendo all'infinito con una distribuzione **(**3.3.12**)** uguale a quella prevista dalla congettura di Hardy-Littlewood [(c)]:

$$\pi_2(x) \approx x*2*C_2*(\frac{1}{logx})^2$$

I pari gemelli, e cioè le coppie di primi gemelli, sono pertanto infiniti e la (3.3.12) è la loro legge di distribuzione.

4 La dimostrazione della congettura di Goldbach

La congettura di Goldbach presuppone che per ogni numero pari $2N_0$ esistano uno o più numeri $n \in N$ tali che $N_0 - n$ ed $N_0 + n$ siano due numeri primi la cui somma è ovviamente uguale a $2N_0$.

Dato un $N_0 \in N$ indichiamo con la lettera $\mathcal{G}$ ogni numero $n \in N$ tale che $N_0 - n$ ed $N_0 + n$ siano due numeri primi.

4.1 Il Teorema dei numeri Ꞡ di N_0

Definizione 4.1.1 *∀ N_0, n_0 ∈ N ed n_0 pari se N_0 è dispari o viceversa, con $N_0 \geq 9$, $0 \leq n_0 \leq N_0 - p_{max}$, con p_{max} numero primo più alto di $\mathbb{P}(\sqrt{2N_0})$, dove $\mathbb{P}(\sqrt{2N_0})$ è l'insieme dei numeri primi dispari $\leq \sqrt{(2N_0)}$, condizione necessaria e sufficiente affinché $N_0 - n_0$ ed $N_0 + n_0$ siano due numeri primi è che n_0 sia un numero prisotto e prisopra di N_0.*

Dim. Dai Corollari (1.2.3) ed (1.4.3), ponendo le condizioni più restrittive tra i due, discendono le condizioni necessarie e sufficienti del Teorema. Così come dalle Osservazioni (1.2.5) ed (1.4.4) discende che sicuramente esiste almeno un n_{01} prisotto ed almeno un n_{02} prisopra di N_0 ma non possiamo far discendere da esse che esiste anche un $n_0 = n_{01} = n_{02}$.
Per dimostrare la congettura di Goldbach invece bisogna appurare che per ogni $N_0 \geq 9$ esiste almeno un $n_0 = n_{01} = n_{02}$ e cioè un numero Ꞡ, prisotto e prisopra di N_0.

A parte il caso particolare di un N_0 primo e quindi della sicura esistenza di un Ꞡ = 0, dobbiamo quindi dimostrare che per ogni N_0 esiste sempre un Ꞡ prisotto e prisopra di N_0 e quindi che esistono sempre due numeri primi equidistanti da N_0:

$p_1 = N_0 -$ Ꞡ

$p_2 = N_0 +$ Ꞡ

e la cui somma è evidentemente uguale a $2N_0$.

A tal fine ricorriamo allo studio della densità dei numeri Ꞡ.

4.2 La densità dei numeri Ꞡ

Diciamo subito che ogni Ꞡ deve presentare le seguenti caratteristiche:

- la sua classe di modulo 2 deve essere uguale a zero se N_0 è dispari, ad 1 se N_0 è pari;
- le sue classi di modulo dei primi successivi (3, 5, 7, etc.) minori o uguali della $(\sqrt{2N_0})$ non devono essere uguali alle due classi corrispondenti al resto (per la non congruenza) ed al suo complemento (per la non compcongruenza) di N_0 per gli stessi moduli (*per esempio se $N_0 = 43$ e Ꞡ=30 si ha che $\mathbb{P}(\sqrt{N_0})$ = {3,5}; $[43]_{mod3}$= 1 con complemento uguale a 2, $[43]_{mod5}$= 3 con complemento uguale a 2; $[30]_{mod3}$=[0] e $[30]_{mod5}$=[0]; pertanto Ꞡ risulta prisotto e prisopra di N_0 e quindi 73 (43+30) e 13 (43-30) costituiscono una coppia di primi la cui somma è uguale a $2N_0$*).

Ciò detto vediamo come calcolare il numero dei Ꞡ minori di un $N_0 \geq 121$ (condizione questa derivante come sappiamo (1.7.1) dalla necessità che $2N_0$ appartenga all'intervallo]0, $\sqrt{(\boldsymbol{2N_0})}$ #]).
Selezionato allora un $N_0 \geq 121$ qualsiasi, chiamiamo p_{max} il numero primo più alto minore o uguale della $\sqrt{(\boldsymbol{2N_0})}$. Consideriamo quindi la tabella-intervallo dei numeri naturali]0, p_{max}#] dove p_{max}# è il primoriale di p_{max} e corrisponde al prodotto 2*3*5*…….* p_{max}, prodotto che corrisponde all'ultimo numero della relativa Tabella numeri-classi p_{max} (1.5.1) di corrispondenza biunivoca tra i numeri dell'intervallo e le rispettive combinazioni delle loro classi di congruenza.

Eliminiamo ora da questa tabella]0, p_{max}#] ognuna delle righe che presenta una classe di congruenza mod 2 uguale 0 o ad 1 a seconda se N_0 è pari o dispari, e/o classi di congruenza dei moduli successivi

(3, 5, ….. , p_{max}) uguali ad una delle due classi corrispondenti al resto ed al complemento di N_0 per gli stessi moduli.
I numeri M della tabella, non eliminati attraverso il precedente crivello, possono essere allora solo:

a) quelli che nella Tabella numeri-classi p_{max} presentano nella loro corrispondente combinazione di classi di congruenza una sola delle due possibili classi di congruenza modulo 2
b) quelli che nella Tabella numeri-classi p_{max} per ogni p_i dispari appartenente all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(2N_0)}\right)$ e NON FATTORE di N_0 presentano nella loro corrispondente combinazione di classi di congruenza una delle p_i -2 possibili classi di congruenza dei moduli 3, 5, ….. , p_{max} con l'esclusione cioè delle due classi corrispondenti al resto ed al complemento di N_0 per gli stessi moduli p_i (*se per es. (N_0) mod7 = 3 con complemento = 4, (M) mod7 dovrà essere eguale ad una delle 5 (7-2) possibili altre classi di congruenza: 0,1,2,5,6*)
c) quelli che nella Tabella numeri-classi p_{max} per ogni p_i dispari appartenente all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(2N_0)}\right)$ e FATTORE di N_0 presentano nella loro corrispondente combinazione di classi di congruenza una delle p_i -1 possibili classi di congruenza diverse da [0] che costituisce sia il resto che il complemento di N_0 per gli stessi moduli-fattori.

I numeri N_0 con fattori diversi dai p_i dispari appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(2N_0)}\right)$, e che quindi rientrano nella categoria b) della precedente classificazione, sono i numeri primi esterni all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(2N_0)}\right)$ od un loro multiplo con coefficiente 2^n oppure una semplice potenza di 2. In particolare prendiamo in esame i soli numeri primi che chiameremo N_{0pm} indicando con $\mathbb{P}$ il loro insieme.

Per i numeri N_{0pm} allora le righe (combinazioni di classi) della tabella]0, p_{max}#] non cancellate, in base al calcolo combinatorio, risulteranno essere:

(4.2.1) $\prod_{p=3}^{p_{max}}(p-2)$

La (4.2.1) ci fornisce quindi la quantità dei numeri M della tabella incongrui ed incompcongrui con N_{0pm}, mentre nulla possiamo dire circa la loro eventuale (non) congruenza e/o (non) compcongruenza con N_{0pm} relativamente agli altri moduli p_j maggiori di p_{max} ed appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\mathrm{pmax\#})}\right)$.

In base allora al Teorema dei numeri G (4.1.1) possiamo affermare che tutti i numeri **M minori di N_{0pm} (M_G)** sono prisotto e prisopra di N_{0pm} e quindi sono numeri G.

Osservazione 4.2.2 *Per il corollario (1.2.3) e l'osservazione 1.2.4 sappiamo però anche che tali numeri M_G, (prisotto e prisopra di N_{0pm}) non comprendono i possibili n_0 per i quali ($N_{0pm} - n_0$) è uguale ad un p_i appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(2N_{0pm})}\right)$. Di conseguenza tutti i numeri G minori di N_{0pm} risultano sempre maggiori/uguali dei numeri M_G.*

La densità media $Dncncomp_{]0,\ p_{max}\#]}$ dei numeri M esistenti nell'intervallo]0, $\sqrt{(2\mathrm{N_{0pm}})}$#] **non congrui e non compcongrui con N_{0pm} per i soli moduli p_i** appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(2\mathrm{N_{0pm}})}\right)$, sapendo che $\sqrt{(2\mathrm{N_{0pm}})}\# = 2*3*\ldots\ldots* p_{max}$, si può scrivere:

(4.2.3) $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{2N_{0pm}}\#]} = \frac{\prod_{p=3}^{pmax}(p-2)}{\prod_{p=2}^{pmax} p} = \frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{p}$

moltiplicando e dividendo il secondo termine della stessa per (p -1) otteniamo:

(4.2.4) $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{2N_{0pm}}\#]} = \frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{p} * \frac{(p-1)}{(p-1)} = \frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-1)}{p} * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{(p-1)} = \prod_{p=2}^{pmax} \frac{(p-1)}{p} * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{(p-1)}$

nell'ultimo membro della (4.2.4) abbiamo sostituito a $\frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-1)}{p}$ il termine $\prod_{p=2}^{pmax} \frac{(p-1)}{p}$ che, come sappiamo dalla (2.2.2), corrisponde,per $N_0 \geq 121$, alla Densità media $Dnc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]}$ dei numeri M esistenti nell'intervallo $]0, \sqrt{(2N_{0pm})}\#]$ **non congrui con N_{0pm} per i soli moduli p_i** appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(2N_{0pm})}\right)$; in queste ultime tre formule p_{max} è ovviamente uguale al numero primo più alto minore della $\sqrt{(2N_{0pm})}$.
Vediamo allora se riusciamo a trovare una relazione tra $\prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{(p-1)}$ e $\prod_{p=2}^{pmax} \frac{(p-1)}{p}$ in modo da poter determinare il valore di $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{2N_{0pm}}\#]}$ in funzione di $Dnc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]}$.

Possiamo scrivere:

(4.2.5) $\frac{\prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{(p-1)}}{\prod_{p=2}^{pmax} \frac{(p-1)}{p}} = \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{(p-1)} * \prod_{p=2}^{pmax} \frac{p}{(p-1)} = \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{(p-1)} * 2 * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{p}{(p-1)} = 2 * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{p*(p-2)}{(p-1)^2}$

dove si può facilmente verificare che il rapporto tra il termine $\prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{(p-1)}$ e quello $\prod_{p=2}^{pmax} \frac{(p-1)}{p}$ per $N_{0pm} = 127$ (il primo "primo" successivo a 121) assume il valore 0,6767578125, per N_0=9006001 il valore 0,6601862196 per poi, al crescere di N_0 verso infinito, e quindi estendendo il prodotto su tutti i numeri primi ≥ 3, tendere rapidamente a decrescere verso la costante dei primi gemelli C_2 che compare nella congettura di Hardy-Littlewood [(c)] sulla distribuzione dei primi gemelli:

$\prod_{p\geq3} \frac{p*(p-2)}{(p-1)^2} = C_2 \approx 0{,}66016118138468695739278121100 14$ ……….

Possiamo quindi scrivere:

(4.2.6) $\prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{(p-1)} \approx 2*C_2*\prod_{p=2}^{pmax} \frac{(p-1)}{p}$

che sostituita nella (4.2.4) ci dà:

$Dncncomp_{]0,\ \sqrt{2N_{0pm}}\#]} \approx \prod_{p=2}^{pmax} \frac{(p-1)}{p} * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{(p-1)} \approx 2*C_2*(\prod_{p=2}^{pmax} \frac{(p-1)}{p})^2$

da cui:

(4.2.7) $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{2N_{0pm}}\#]} \approx 2*C_2*(Dnc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]})^2$

In questa relazione che lega $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{2N_{0pm}}\,\#]}$ al quadrato di $Dnc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\,\#]}$ la costante C_2 cambia poco al variare di N_0 quando questo è uguale ad un numero primo N_{0pm}. Se applichiamo la (4.2.7) all'intervallo $]0, N_{0pm}]$ si può dimostrare (Appendice B) che si compie una approssimazione relativa trascurabile pari a 0,1812 per N_{0pm} = 127, e rapidamente decrescente per valori superiori di N_{0pm} (0,0404 per N_{0pm} = 1277). Approssimazione tra l'altro che per bassi valori di N_{0pm} viene compensata dai corrispondenti valori più alti di C_2.
Si può quindi scrivere con buona approssimazione:

(4.2.8) $Dncncomp_{]0,\ N_0]} \approx 2*C_2*(\ Dnc_{]0,\,N_{0pm}]})^2$

<u>A prescindere dalla legge di distribuzione della (4.2.8), la piena analogia esistente (con N_0 primo) tra le (3.3.7) e (3.3.8) relative ai primi gemelli e le (4.2.7) e (4.2.8) ci induce a ritenere che anche la $Dncncomp_{]0,\ N_0]}$ come la $Dncncomp(PG)_{]0,\ N_0]}$ è sicuramente maggiore di 1 (essendoci in ogni intervallo $]0, N_{0pm}]$ con $N_{0pm} \geq 127$ ben più di una coppia di primi gemelli) e quindi in linea con la congettura di Goldbach.</u>

Osseravzione 4.2.9 *Nella (4.2.8) come riportato nelle Osservazioni (4.2.2) e (2.2.6) sia Dncncomp(Ԍ)$_{(N0pm)}$ che $Dnc_{]0,\,N_{0pm}]})$ non comprendono i possibili n_0 per i quali gli (N_{0pm} - n_0) sono uguali ai primi minori o uguali alla $\sqrt{(2N_{0pm})}$ ma giacché questa relazione è sempre valida $\forall\ N_{0pm} \in \mathbb{P}$ a partire da N_{0pm} = 127 (il primo "primo" successivo a 121) possiamo estendere la (4.2.8) a tutti i numeri primi (ad eccezione di 2, 3, 5, 7, 11, 13) minori di qualsiasi N_{0pm} maggiore o uguale di 127. Infatti per N_{0pm} = 127 (e quindi $\sqrt{(2N_{0pm})} = \sqrt{254}$ = 15,93, p_{max}=13) la (4.2.8) riguarda tutti gli n_0 prisotto e prisopra di N_{0pm} che sottratti ad N_{0pm} danno come risultato primi compresi tra 14 e 127; per N_{0pm} = 131 (e quindi $\sqrt{262}$ = 16,18, p_{max}=13) la (4.2.8) riguarda i primi compresi tra 14 e 131; per N_{0pm} = 137 (e quindi $\sqrt{274}$ = 16,55, p_{max}=13) la (4.2.8) riguarda ancora primi compresi tra 14 e 137; per $N_{0\,pm}$= 149 (e quindi $\sqrt{298}$ = 17,26, p_{max}=17) la (4.2.8) riguarda ancora primi compresi tra 18 e 149; e possiamo continuare così per tutti i successivi N_{0pm}.*

Ma si può verificare, ponendo N_{0pm}=127 e quindi C_2=0,6767, che la (4.2.8), con una approssimazione di circa il 14%, sussiste anche prendendo in considerazione i primi 2, 3, 5, 7, 11, 13. Infatti con N_{0pm}=127 si contano 31 primi e 9 numeri Ԍ donde la (4.2.9) diventa:

$$\frac{9}{127} \approx 2*0{,}6767*\left(\frac{31}{127}\right)^2$$

0,07086 ≈ 0,08063

Ovviamente al crescere di N_{0pm}, ferma restando la validità della (4.2.8) per tutti i primi maggiori di 13, l'approssimazione decresce.
In definitiva $\forall\ N_{0pm} \in \mathbb{P}$ e maggiore o uguale di 127 possiamo ritenere ancora valida la (4.2.8) anche per i primi minori di N_{0pm} e quindi, sostituire in essa la densità $D_{Ԍ(N_{0pm})}$ dei numeri Ԍ ≤ N_{0pm} al posto di $Dncncomp_{]0,\ N_0]}$ e la densità $Dprimi_{]0,\,N_{0pm}]}$ dei primi minori o uguali di N_{0pm} al posto di $Dnc_{]0,\,N_{0pm}]}$).
Di conseguenza dalla (4.2.8) deriva la relazione:

(4.2.10) $D_{Ԍ(N_{0pm})} \approx 2*C_2*(Dprimi_{]0,\,N_{0pm}]})^2$

Essendo poi per il TNP $Dprimi_{]0,\,N_{0pm}]} = \frac{1}{logN_0}$ si può scrivere:

(4.2.11) $D_{\text{Ꞡ}(N0pm)} \approx 2 * C_2 * \left(\frac{1}{logN_{0pm}}\right)^2$

Per calcolare il numero $M_{\text{Ꞡ}(N0pm)}$ dei numeri Ꞡ minori di N_{0pm} moltiplichiamo ambo i membri della (4.2.11) per N_{0pm} :

(4.2.12) $M_{\text{Ꞡ}(N0pm)} = D_{\text{Ꞡ}(N0pm)} * N_{0pm} \approx N_{0pm} * 2 * C_2 * \left(\frac{1}{logN_{0pm}}\right)^2$

In appendice D è riportato un esempio di n_0 prisotto e prisopra di N_{0pm} e dei relativi valori di $Dnc_{]0,\, N_{0pm}\,]}$, $Dncncomp_{]0,\, N_{0}]}$ ed M_G verificati e calcolati.

Si sottolinea come la relazione (4.2.12) abbia una stretta somiglianza con il teorema di Vinogradov[1].

Osservazione 4.2.13 *Poiché l'espressione $N_{0pm} * \left(\frac{1}{logN_{0pm}}\right)^2$ per $N_{0pm} = 127$ assume un valore circa pari a 5 che aumenta per gli $N_{0pm} > 12$ ed, il prodotto $2 * C_2$ è sempre maggiore di 1, $M_{\text{Ꞡ}(N0pm)}$ sarà sempre maggiore o uguale ad 1. A conferma di ciò c'è da considerare che con N_{0pm} primo ci sarà sempre almeno un numero Ꞡ = 0.*

Dalla (4.2.12) discende quindi che per tutti i numeri primi N_{0pm} i numeri uguali ai loro doppi ($2 * N_{0pm}$) risultano essere sempre somma di una o più coppie di primi.

Per gli N_0 invece diversi dagli N_{0pm} la $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{2N_0}\,\#]}$ (4.2.3) si modifica nell'espressione:

(4.2.14) $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{2N_0}\,\#]} = \frac{1}{2} * \prod_{3 \le p_l \le p_{max}} \frac{(p_l - 2)}{p_l} * \prod_{3 \le p_j \le p_{max}} \frac{(p_j - 1)}{p_j}$

in cui i primi p_j appartenenti a $\mathbb{P}\left(\sqrt{(2N_0)}\right)$ compaiono distinti nei p_j uguali ai fattori di N_0 ed in quelli p_l che non lo sono [vedi paragrafo 4.2 punti b) e c)]. Ma la (4.2.14) si può scrivere anche così:

(4.2.15) $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{2N_0}\,\#]} = \frac{1}{2} * \prod_{3 \le p_i \le p_{max}} \frac{(p_i - 2)}{p_i} * \prod_{3 \le p_j \le p_{max}} \frac{(p_j - 1)}{(p_j - 2)}$

---

[1] Il teorema di Vinogradov [(d)] afferma che qualsiasi numero intero dispari sufficientemente grande può essere scritto come la somma di c numeri primi con c ≥ 3 . Il teorema suddetto è dimostrato solo per c ≥ 3, mentre per c = 2 diventa una congettura (di Goldbach estesa) ed il numero di coppie di primi uguali la cui somma è uguale ad un n pari è espresso dalla seguente relazione:

$$2\Pi_2 \left(\prod_{\substack{p \mid n \\ p \ge 3}} \frac{p-1}{p-2} \right) \int_2^n \frac{dx}{\ln^2 x} \approx 2\Pi_2 \left(\prod_{\substack{p \mid n \\ p \ge 3}} \frac{p-1}{p-2} \right) \frac{n}{\ln^2 n},$$

Dove il termine Π_2 è la costante dei primi gemelli. Se sostituiamo ad n pari il termine 2M, con M primo, il termine

$$\left(\prod_{\substack{p \mid n \\ p \ge 3}} \frac{p-1}{p-2} \right)$$

viene a mancare essendo n=2M non divisibile per nessun primo ≥ 3 e la formula di Vinogradov con c=2 diventa uguale alla nostra (4.2.10) dimostrata per ogni M ≥ 127

Sapendo che il valore di $p_{\max}$ della (4.2.3) e della (4.2.15) rimane lo stesso per ogni intervallo]0, N_0] con N_0 tale che risulti $p_{\max} < \sqrt{2N_0} < p_{\max succ}$ dove $p_{\max}$ è il primo più alto minore di $\sqrt{2N_{0pm}}$ e $p_{\max succ}$ il primo immediatamente successivo a $p_{\max}$, dal confronto tra la (4.2.15), in cui $Dncncomp_{]0,\ p_{max}\#]}$ è relativo ad un N_0 qualsiasi diverso dagli Nopm, e la (4.2.3) relativa al primo più alto Nopm < No risulta:

(4.2.16) $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{2N_0}\#]} = Dncncomp_{]0,\ \sqrt{2N_{0pm}}\#]} * \prod_{3\le p_j \le p_{max}} \frac{(p_j-1)}{(p_j-2)}$

in cui entrambe le densità si riferiscono allo stesso intervallo]0, p_{max} #] con p_{max} # = $\sqrt{2N_0}$ # = $\sqrt{2N_{0pm}}$ # ma lo sono di interi dell'intervallo incongrui ed incompcongrui con due numeri diversi: N_0 ed N_{0pm}

In base alla (4.2.7) la (4.2.16) diventa:

(4.2.17) $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{2N_0}\#]} = 2*C_2*(Dnc_{]0,\ \sqrt{2N_{0pm}}\#]})^2 * \prod_{3\le p_j \le p_{max}} \frac{(p_j-1)}{(p_j-2)} =$

$= 2*C_2*(Dnc_{]0,\ \sqrt{2N_0}\#]})^2 * \prod_{3\le p_j \le p_{max}} \frac{(p_j-1)}{(p_j-2)}$

essendo per ipotesi ($p_{\max} < \sqrt{2N_0} < p_{\max succ}$ dove $p_{\max}$ è il primo più alto minore di $\sqrt{2N_{0pm}}$) $Dnc_{]0,\ \sqrt{2N_{0pm}}\#]} = Dnc_{]0,\ \sqrt{2N_0}\#]}$.

Essendo infine il termine $\prod_{3\le p_j \le p_{max}} \frac{(p_j-1)}{(p_j-2)} > 1$ la (4.2.17) a sua volta, diventa:

(4.2.18) $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{2N_0}\#]} > 2*C_2*(Dnc_{]0,\ \sqrt{2N_0}\#]})^2$

La relazione di diseguaglianza (4.2.18), analogamente a quella di uguaglianza (4.2.7), seguendo lo stesso ragionamento svolto nell'Appendice B, presenta una approssimazione relativa trascurabile quando viene riferita all'intervallo]0, N_0].
Questo ci consente di poter applicare la (4.2.18) all'intervallo]0, N_0] oltre che all'intervallo]0, $\sqrt{2N_{0pm}}$#] permettendoci di scrivere::

(4.2.19) $Dncncomp_{]0,N_0]} > 2*C_2*(Dnc_{]0,N_0]})^2$

In base all'osservazione (4.2.9) possiamo però ritenere che ∀ N_0 ∈ N maggiore di 121 la (4.2.19) rimane valida per tutti i primi minori di N_0 e quindi possiamo sostituire la densità D(G)$_{(N0)}$ di tutti i numeri G minori di N_0 al posto di $Dncncomp_{]0,N_0]}$ e $Dprimi_{]0,N_0]}$ al posto di $Dnc_{]0,N_0]}$, scrivendo:

(4.2.20) D(G)$_{(N0)}$ > $2*C_2*(Dprimi_{]0,N_0]})^2$

Se ora applichiamo il TNP e moltiplichiamo ambo i membri della (4.2.20) per N_0 si ottiene il numero $M_{G(N0)}$ dei numeri G minori di N_0 :

(4.2.21) $M_{G(N0)}$ = D(G)$_{(N0)}$*N_0 > $N_0*2*C_2*(\frac{1}{logN_0})^2$

dove $N_0*(\frac{1}{logN_0})^2$ assume un valore sempre maggiore o uguale ad 1 per $N_0 \geq 2$. Di conseguenza essendo anche $2*C_2$ sempre maggiore di 1, $M_{G(N0)}$ sarà sempre maggiore o uguale ad 1.

Dalla (4.2.21) discende quindi che anche per tutti i numeri $N_0 \neq N_{0pm}$ i numeri $\cancel{G}$ risultano essere sempre maggiori o uguali ad 1 e quindi ci sarà sempre almeno una coppia di primi ($N_0 - \cancel{G}$ ed $N_0 + \cancel{G}$) la cui somma è pari a $2*N_0$ come previsto dalla congettura di Goldbach.

Per gli N_0 minori di 121 la congettura di Goldbach è facilmente verificabile.

Tabella indicante la corrispondenza biunivoca tra i numeri da 1 a 210 e tutte le combinazioni delle classi di congruenza modulo 2 - 3 – 5– 7

num.	moduli	num.	moduli	num.	moduli
	2 – 3 – 5 - 7		2 – 3 – 5 - 7		2 – 3 – 5 - 7
1)	1 - 1 - 1 - 1	71)	1 - 2 - 1 - 1	141)	1 - 0 - 1 - 1
2)	0 - 2 - 2 - 2	72)	0 - 0 - 2 - 2	142)	0 - 1 - 2 - 2
3)	1 - 0 - 3 - 3	73)	1 - 1 - 3 - 3	143)	1 - 2 - 3 - 3
4)	0 - 1 - 4 - 4	74)	0 - 2 - 4 - 4	144)	0 - 0 - 4 - 4
5)	1 - 2 - 0 - 5	75)	1 - 0 - 0 - 5	145)	1 - 1 - 0 - 5
6)	0 - 0 - 1 - 6	76)	0 - 1 - 1 - 6	146)	0 - 2 - 1 - 6
7)	1 - 1 - 2 - 0	77)	1 - 2 - 2 - 0	147)	1 - 0 - 2 - 0
8)	0 - 2 - 3 - 1	78)	0 - 0 - 3 - 1	148)	0 - 1 - 3 - 1
9)	1 - 0 - 4 - 2	79)	1 - 1 - 4 - 2	149)	1 - 2 - 4 - 2
10)	0 - 1 - 0 - 3	80)	0 - 2 - 0 - 3	150)	0 - 0 - 0 - 3
11)	1 - 2 - 1 - 4	81)	1 - 0 - 1 - 4	151)	1 - 1 - 1 - 4
12)	0 - 0 - 2 - 5	82)	0 - 1 - 2 - 5	152)	0 - 2 - 2 - 5
13)	1 - 1 - 3 - 6	83)	1 - 2 - 3 - 6	153)	1 - 0 - 3 - 6
14)	0 - 2 - 4 - 0	84)	0 - 0 - 4 - 0	154)	0 - 1 - 4 - 0
15)	1 - 0 - 0 - 1	85)	1 - 1 - 0 - 1	155)	1 - 2 - 0 - 1
16)	0 - 1 - 1 - 2	86)	0 - 2 - 1 - 2	156)	0 - 0 - 1 - 2
17)	1 - 2 - 2 - 3	87)	1 - 0 - 2 - 3	157)	1 - 1 - 2 - 3
18)	0 - 0 - 3 - 4	88)	0 - 1 - 3 - 4	158)	0 - 2 - 3 - 4
19)	1 - 1 - 4 - 5	89)	1 - 2 - 4 - 5	159)	1 - 0 - 4 - 5
20)	0 - 2 - 0 - 6	90)	0 - 0 - 0 - 6	160)	0 - 1 - 0 - 6
21)	1 - 0 - 1 - 0	91)	1 - 1 - 1 - 0	161)	1 - 2 - 1 - 0
22)	0 - 1 - 2 - 1	92)	0 - 2 - 2 - 1	162)	0 - 0 - 2 - 1
23)	1 - 2 - 3 - 2	93)	1 - 0 - 3 - 2	163)	1 - 1 - 3 - 2
24)	0 - 0 - 4 - 3	94)	0 - 1 - 4 - 3	164)	0 - 2 - 4 - 3
25)	1 - 1 - 0 - 4	95)	1 - 2 - 0 - 4	165)	1 - 0 - 0 - 4
26)	0 - 2 - 1 - 5	96)	0 - 0 - 1 - 5	166)	0 - 1 - 1 - 5
27)	1 - 0 - 2 - 6	97)	1 - 1 - 2 - 6	167)	1 - 2 - 2 - 6
28)	0 - 1 - 3 - 0	98)	0 - 2 - 3 - 0	168)	0 - 0 - 3 - 0
29)	1 - 2 - 4 - 1	99)	1 - 0 - 4 - 1	169)	1 - 1 - 4 - 1
30)	0 - 0 - 0 - 2	100)	0 - 1 - 0 - 2	170)	0 - 2 - 0 - 2
31)	1 - 1 - 1 - 3	101)	1 - 2 - 1 - 3	171)	1 - 0 - 1 - 3
32)	0 - 2 - 2 - 4	102)	0 - 0 - 2 - 4	172)	0 - 1 - 2 - 4
33)	1 - 0 - 3 - 5	103)	1 - 1 - 3 - 5	173)	1 - 2 - 3 - 5
34)	0 - 1 - 4 - 6	104)	0 - 2 - 4 – 6	174)	0 - 0 - 4 - 6
35)	1 - 2 - 0 - 0	105)	1 - 0 - 0 - 0	175)	1 - 1 - 0 - 0
36)	0 - 0 - 1 - 1	106)	0 - 1 - 1 - 1	176)	0 - 2 - 1 - 1
37)	1 - 1 - 2 - 2	107)	1 - 2 - 2 - 2	177)	1 - 0 - 2 - 2
38)	0 - 2 - 3 - 3	108)	0 - 0 - 3 - 3	178)	0 - 1 - 3 - 3
39)	1 - 0 - 4 - 4	109)	1 - 1 - 4 - 4	179)	1 - 2 - 4 - 4
40)	0 - 1 - 0 - 5	110)	0 - 2 - 0 - 5	180)	0 - 0 - 0 - 5
41)	1 - 2 - 1 - 6	111)	1 - 0 - 1 - 6	181)	1 - 1 - 1 - 6
42)	0 - 0 - 2 - 0	112)	0 - 1 - 2 - 0	182)	0 - 2 - 2 - 0
43)	1 - 1 - 3 - 1	113)	1 - 2 - 3 - 1	183)	1 - 0 - 3 - 1
44)	0 - 2 - 4 - 2	114)	0 - 0 - 4 - 2	184)	0 - 1 - 4 - 2
45)	1 - 0 - 0 - 3	115)	1 - 1 - 0 - 3	185)	1 - 2 - 0 - 3
46)	0 - 1 - 1 - 4	116)	0 - 2 - 1 - 4	186)	0 - 0 - 1 - 4
47)	1 - 2 - 2 - 5	117)	1 - 0 - 2 - 5	187)	1 - 1 - 2 - 5
48)	0 - 0 - 3 - 6	118)	0 - 1 - 3 - 6	188)	0 - 2 - 3 - 6
49)	1 - 1 - 4 - 0	119)	1 - 2 - 4 - 0	189)	1 - 0 - 4 - 0
50)	0 - 2 - 0 - 1	120)	0 - 0 - 0 - 1	190)	0 - 1 - 0 - 1
51)	1 - 0 - 1 - 2	121)	1 - 1 - 1 - 2	191)	1 - 2 - 1 - 2
52)	0 - 1 - 2 - 3	122)	0 - 2 - 2 - 3	192)	0 - 0 - 2 - 3
53)	1 - 2 - 3 - 4	123)	1 - 0 - 3 - 4	193)	1 - 1 - 3 - 4
54)	0 - 0 - 4 - 5	124)	0 - 1 - 4 - 5	194)	0 - 2 - 4 - 5
55)	1 - 1 - 0 - 6	125)	1 - 2 - 0 - 6	195)	1 - 0 - 0 - 6
56)	0 - 2 - 1 - 0	126)	0 - 0 - 1 - 0	196)	0 - 1 - 1 - 0
57)	1 - 0 - 2 - 1	127)	1 - 1 - 2 - 1	197)	1 - 2 - 2 - 1
58)	0 - 1 - 3 - 2	128)	0 - 2 - 3 - 2	198)	0 - 0 - 3 - 2
59)	1 - 2 - 4 - 3	129)	1 - 0 - 4 - 3	199)	1 - 1 - 4 - 3
60)	0 - 0 - 0 - 4	130)	0 - 1 - 0 - 4	200)	0 - 2 - 0 - 4
61)	1 - 1 - 1 - 5	131)	1 - 2 - 1 - 5	201)	1 - 0 - 1 - 5
62)	0 - 2 - 2 - 6	132)	0 - 0 - 2 - 6	202)	0 - 1 - 2 - 6
63)	1 - 0 - 3 - 0	133)	1 - 1 - 3 - 0	203)	1 - 2 - 3 - 0
64)	0 - 1 - 4 - 1	134)	0 - 2 - 4 - 1	204)	0 - 0 - 4 - 1
65)	1 - 2 - 0 - 2	135)	1 - 0 - 0 - 2	205)	1 - 1 - 0 - 2
66)	0 - 0 - 1 - 3	136)	0 - 1 - 1 - 3	206)	0 - 2 - 1 - 3
67)	1 - 1 - 2 - 4	137)	1 - 2 - 2 - 4	207)	1 - 0 - 2 - 4
68)	0 - 2 - 3 - 5	138)	0 - 0 - 3 - 5	208)	0 - 1 - 3 - 5
69)	1 - 0 - 4 - 6	139)	1 - 1 - 4 - 6	209)	1 - 2 - 4 - 6
70)	0 - 1 - 0 - 0	140)	0 - 2 - 0 - 0	210)	0 - 0 - 0 - 0

Premessa Se vogliamo applicare la (4.2.7) all'intervallo]0, N_{0pm}] oltre che all'intervallo]0, p_{max}#], con p_{max} uguale al primo più alto minore o uguale della $\sqrt{2N_{0pm}}$, dobbiamo tener presente che mentre nell'intervallo]0, p_{max}#] sia $Dnc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]}$ che $Dncncomp_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]}$ sono pari al prodotto dei fattori (p - x)/p [dove x è uguale ad 1 per $Dnc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]}$ ed a 2 per $Dncncomp_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]}$] e dove rispettivamente p varia tra 2 e p_{max} e tra 3 e p_{max}, invece nell'intervallo]0, N_{0pm}], le due densità $Dnc_{]0,\, N_{0pm}]}$ e $Dncncomp_{]0,\, N_{0pm}]}$ non sono più uguali al prodotto dei fattori (p - x)/p giacché N_{0pm} a differenza di p_{max}# non è multiplo di alcun primo compreso nell'intervallo [2, p_{max}]. Si può dimostrare però che il rapporto tra la densità $Dncncomp_{]0,\, N_{0pm}]}$ ed il quadrato della densità $Dnc_{]0,\, N_{0pm}]}$ relative all'intervallo]0, N_{0pm}] è quasi uguale a quello della (4.2.7) con una approssimazione relativa pari a 0,1812 per N_{0pm}=127 e rapidamente decrescente per valori superiori (0,0404 per N_{0pm}=1277).

A tal fine calcoliamo le singole densità per un solo modulo p_1 Ɛ {2, 3, 5……, p_{max}} degli interi nell'intervallo]0, N_{0pm}] non congrui a N_{0pm} modulo p_1 (per x=1) e non congrui e non compcongrui a N_{0pm} modulo p_1 (per x=2). Visto che queste densità nell'intervallo]0, N_{0pm}] sono diverse da (p_1 - x) / p_1, al fine di calcolarle, per ogni p_1 dividiamo l'intervallo]0, N_{0pm}] in due intervalli]0, X_{p_1}] ed]X_{p_1}, N_{0pm}] dove X_{p_1} è il massimo multiplo di p_1 contenuto nell'intervallo]0, N_{0pm}]. Calcoliamo quindi le densità totali di questi numeri (p_1 - x), non congrui a N_{0pm} modulo p_1 (per x=1) e non congrui e non compcongrui a N_{0pm} modulo p_1 (per x=2), presenti nei due intervalli:

$$\text{a) } D(p\_1) = \frac{X_{p\_1} * \frac{(p\_1 - x)}{p\_1} + ([N_{0pm}]_{p\_1} - f(h,x))}{N_{0pm}} = \frac{L * (p_1 - x) + ([N_{0pm}]_{p_1} - f(h,x))}{N_{0pm}}$$

dove L è uguale al rapporto tra il massimo multiplo X_{p_1} di p_1 contenuto nell'intervallo]0, N_{0pm}] e p_1, dove $[N_{0pm}]_{p\_1}$ < p_1 è pari all'ampiezza dell'intervallo] X_{p_1}, N_{0pm}], dove h è il numero degli interi presenti nell'intervallo] X_{p_1}, N_{0pm}] i cui moduli p_1, nel caso di x=1, sono uguali al resto della divisione di N_{0pm} per p_1, e, nel caso di x=2, sono uguali al resto o al suo complemento della divisione di N_{0pm} per p_1 e dove infine f(h,x) è una funzione di h e di x che assume i valori di 1 o 2 a seconda dei valori di h e di x. Essendo ovviamente N_{0pm} un numero congruo con se stesso h sarà pari ad 1 o 2.

Sapendo che $[N_{0pm}]$p_1 può assumere un valore compreso tra 1 e p_1 – 1 (essendo escluso il valore 0 in quanto sia N_{0pm} che p_1 sono primi) e che f(h,x), a seconda del valore di h ed x, può valere 1 o 2, si può affermare che il termine ($[N_{0pm}]_{p\_1}$ – f(h,x)), scegliendo sempre per la finalità della nostra dimostrazione il valore più alto tra quelli possibili, assume un valore secondo il seguente schema:

se h=1 sia per x=1 che per x=2 si ha: ($[N_{0pm}]_{p\_1}$ – f(h,x)) = $[N_{pm}]_{p\_1}$ - 1
se h=2 e quindi x=2 si ha: ($[N_{0pm}]_{p\_1}$ – f(h,x)) = $[N_{0pm}]_{p\_1}$ – 2

Possiamo quindi scrivere:

$$\text{b) } L = \frac{(N_{0pm} - [N_0pm]_{p\_1})}{p\_1}$$

e dalla a):

c) D(p_1) = $\left\{\frac{\left(N_{0pm}-[N_{0pm}]_{p\_1}\right)}{p\_1} * (p\_1 - x) + \left([N_{0pm}]_{p\_1} - \mathrm{f(h,x)}\right)\right\} * \frac{1}{N_{0pm}}$

e poi moltiplicando e dividendo il termine ($[N_{0pm}]_{p\_1}$ – f(h,x)) per p_1:

d) D(p_1) = $\frac{N_{0pm}*(p\_1-x)-[N_{0pm}]_{p\_1}*p\_1+[N_{0pm}]_{p\_1}*x+([N_0pm]_{p\_1}-f(h,x))*p\_1}{N_{0pm}*p\_1}$

e) D(p_1) = $\frac{N_{0pm}*(p\_1-x)-[N_{0pm}]_{p\_1}*p\_1+[N_{0pm}]_{p\_1}*x+[N_{0pm}]_{p\_1}*p\_1-f(h,x)*p\_1}{N_{0pm}*p\_1}$

f) D(p_1) = $\frac{N_{0pm}*(p\_1-x)+[N_{0pm}]_{p\_1}*x-f(h,x)*p\_1}{N_{0pm}*p\_1}$

g) D(p_1) = $1-\frac{N_{0pm}*x}{N_{0pm}*p\_1}$ - $\frac{f(h,x)*p_1-[N_{0pm}]_{p\_1}*x}{N_{0pm}*p\_1}$

Vediamo ora in base ai possibili valori di h (1, 2) e di x (1, 2) quale espressione assume la g).

Per h=1 ed x=1, 2 e quindi f(h,x)=1 si ha che:

h) D(p_1) = $1-\frac{x}{p\_1}$ - $\frac{p_1-[N_{0pm}]_{p\_1}*x}{N_{0pm}*p\_1}$

Per h=2 ed x=2 e quindi f(h,x)=2 si ha che:

i) D(p_1) = $1-\frac{x}{p\_1}$ - $\frac{2p\_1-[N_{0pm}]_{p\_1}*x}{N_{0pm}*p\_1}$

Definizione Definiamo con $\mathrm{Dh}_{\mathrm{N0pm}}$ il prodotto delle rispettive singole densità indicate dalla h) (con x=1) per ognuno degli p_1 minori o uguali a p_{max} e con $\mathrm{Di}_{\mathrm{N0pm}}$ il prodotto delle rispettive singole densità indicate dalla i) (con x=2) per ognuno degli p_1 minori o uguali a p_{max} (con p_{max} uguale al primo più alto minore o uguale della $\sqrt{2N_{0pm}}$).

Lemma a) *L'approssimazione relativa a_{rt} tra il rapporto $Di_{N0pm}/Dh_{N0pm}{}^2$ e quello $\left(Dnncompc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]}\right)/\left(Dnc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]}\right)^2$ è uguale a:*

$t)\ a_{rt} = \frac{4*\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{Nopm}}*ln\sqrt{2\mathrm{Nopm}}}$

Iniziamo a calcolare l'approssimazione della $D\mathrm{h}_{\mathrm{N0pm}}$ rispetto alla $Dnc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]}$ e della Di_{N0pm} rispetto alla $Dncncomp_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]}$. Nelle espressioni h) ed i) i primi due termini del secondo membro rappresentano le singole densità (p_1 -1)/p_1 che gli n €]0, p_{max} #] siano non congrui con N_{0pm} modulo p_1 (con x=1) oppure non congrui e non compcongrui con N_{0pm} modulo p_1 (con x=2) nell'intervallo]0, p_{max}#] . L'ultimo termine del secondo membro rappresenta allora l'approssimazione che la singola densità D(p_1) presenta rispetto alla singola densità (p_1 -1)/p_1 nell'intervallo]0, N_{0pm}]. Ai fini della nostra dimostrazione dobbiamo considerare nelle espressioni

h) ed i) tra i diversi possibili valori di $[N_{0pm}]_{p\_1}$ quello con l'approssimazione più grande per poter verificare che la stessa non compromette il risultato finale del percorso dimostrativo. Facciamo riferimento allora ad una unica espressione di D(p_1) e calcoliamone l'approssimazione relativa:

j) $D(p\_1) = \frac{p_{\_1}-x}{p\_1} - \frac{x*p_1 - [N_{0pm}]_{p\_1}*x}{N_{0pm}*p\_1}$

con approssimazione relativa $a_r = \frac{x*p\_1 - [N_{0pm}]_{p\_1}*x}{N_{0pm}*p\_1} * \frac{p_{\_1}}{p\_1-x}$

La j) **per x=1** diventa:

k) $D_1(p\_1) = 1 - \frac{1}{p\_1} - \frac{p\_1-[N_{0pm}]_{p\_1}}{N_{0pm}*p\_1}$

che, ponendo $[N_{0pm}]_{p\_1} = 1$ sempre per scegliere l'approssimazione massima, diventa:

l) $D_1(p\_1) = 1 - \frac{1}{p\_1} - \frac{1}{N_{0pm}} * \frac{p_{p\_1}-1}{p\_1} = \frac{p_{\_1}-1}{p\_1} - \frac{1}{N_{0pm}} * \frac{p_{p\_1}-1}{p\_1}$

con approssimazione relativa $a_r = \frac{1}{N_{0pm}} * \frac{p_{p\_1}-1}{p\_1} * \frac{p_{\_1}}{p\_1-1} = \frac{1}{N_{0pm}}$

ed invece **per x=2** diventa:

m) $D_2(p\_1) = \frac{p_{\_1}-2}{p\_1} - \frac{2}{N_{0pm}} * \frac{p\_1-2}{p\_1}$

con approssimazione relativa $a_r = \frac{2}{N_{0pm}} * \frac{p\_1-2}{p\_1} * \frac{p_{\_1}}{p\_1-2} = \frac{2}{N_{0pm}}$

Abbiamo già definito i prodotti Dh_{N0pm} e Di_{N0pm} come:

n) $Dh_{N0pm} := \prod_{pi=2}^{p_{max}} D_1(p_i)$ e $Di_{N0pm} := \frac{1}{2} * \prod_{pi=3}^{p_{max}} D_2(p_i)$

da cui discende che il rapporto tra Di_{N0pm} ed il quadrato di Dh_{N0pm} è pari ad:

o) $\frac{Di_{N0pm}}{{Dh_{N0pm}}^2} = \frac{\frac{1}{2}*\prod_{p=3}^{pmax} D_2(p_i)}{\left(\prod_{p=2}^{p_{max}} D_1(p_i)\right)^2}$

Come quanto già scritto per le espressioni h) ed i) anche per le espressioni l) ed m) i primi termini del secondo membro rappresentano le densità (p_1 -1)/ p_1 e (p_1 -2)/ p_1 che il generico numero n €]0, p_{max} #] sia non congruo con N_{0pm} modulo p_1 (con x=1) oppure non congruo e non compcongruo con N_{0pm} modulo p_1 (con x=2). Gli ultimi termini del secondo membro delle espressioni l) ed m) rappresentano allora le approssimazioni che le densità D_1(p_1) e D_2(p_1) nell'intervallo]0, N_{0pm}] presentano rispetto a quelle (p_1 -1)/ p_1 e (p_1 -2)/ p_1 relative all'intervallo]0, p_{max}#]).

Riprendendo le espressioni (2.2.2) e (4.2.3) del testo relative alle densità degli interi presenti nell'intervallo]0, p_{max}#] rispettivamente incongrui oppure incongrui ed incompcongrui con N_{0pm} moduli $p_i \le p_{max}$:

$$p)\ Dnc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\,\#]} = \prod_{p=2}^{pmax} \frac{(p-1)}{p} \qquad e \qquad q)\ Dncncomp_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\,\#]} = \frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{p}$$

vediamo che esse costituiscono rispettivamente il prodotto dei primi termini delle D_1(p_1) e delle D_2(p_1) per quanti sono i p_1 (p_i) minori o uguali a p_{max} rispettivamente per x=1 ed x=2. L'approssimazione relativa delle espressioni n) rispetto a quelle p) e q), analogamente a quanto avviene per la propagazione dell'errore, sarà pari alla somma delle approssimazioni relative dei singoli termini $(p_i - x)/p_i$.

Ciò significa che per le espressioni n) ed o) ci sta una approssimazione relativa a_r pari ad $\frac{x}{N_{0pm}} * \sum_{p_i \le p_{max}} {p_i}^0$ che, per il TNP e sapendo che p_{max} é il primo più alto minore o uguale alla $\sqrt{2N_{0pm}}$, diventa:

$$r)\ a_r = \frac{x}{\text{Nopm}} * \frac{\sqrt{2\text{Nopm}}}{ln\sqrt{2\text{Nopm}}} = \frac{x*\sqrt{2}}{\sqrt{\text{Nopm}}*ln\sqrt{2\text{Nopm}}}$$

approssimazione relativa quindi che per N_{0pm} = 127 è uguale a: 0,0453*x mentre per N_{0pm} = 1277 é uguale a: 0,0101*x e continua a decrescere per valori crescenti di N_{0pm}.

Dalle espressioni p) e q) si è ricavato nel testo che il rapporto tra la densità degli interi presenti nell'intervallo]0, p_{max}#] incongrui ed incompcongrui con N_{0pm} moduli $p_i \le p_{max}$ ed il quadrato della densità degli interi presenti nell'intervallo]0, p_{max}#] incongrui con N_{0pm} moduli $p_i \le p_{max}$ è pari

$$s)\ \frac{Dncncomp_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\,\#]}}{{Dnc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\,\#]}}^2} = \frac{\frac{1}{2}*\prod_{p=3}^{pmax}\frac{(p-2)}{p}}{\left(\prod_{p=2}^{pmax}\frac{(p-1)}{p}\right)^2}$$

mentre dalle espressioni n) si è ricavato che il rapporto o) nell'intervallo]0, N_{0pm}] rispetto al rapporto s) presenta una approssimazione relativa pari alla somma delle approssimazioni relative dei termini presenti al numeratore ed al denominatore; il termine al denominatore presenta una approssimazione doppia di quella indicata nella r) e relativa, con x=1, al termine $\prod_{p=2}^{pmax}\frac{(p-1)}{p}$ mentre il termine al numeratore presenta una approssimazione indicata nella r) e relativa, con x=2, al termine $\frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax}\frac{(p-2)}{p}$.
Quindi l'approssimazione relativa del rapporto o) rispetto a quello s), quando invece di considerare l'intervallo]0, p_{max} #] si considera quello]0, N_{0pm}], è pari a:

$$t)\ a_{rt} = \frac{2*\sqrt{2}}{\sqrt{\text{Nopm}}*ln\sqrt{2\text{Nopm}}} + 2 * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\text{Nopm}}*ln\sqrt{2\text{Nopm}}} = \frac{4*\sqrt{2}}{\sqrt{\text{Nopm}}*ln\sqrt{2\text{Nopm}}}$$

per cui per N_{0pm} = 127 a_{rt} = 0,1812, per N_0 = 1277 a_{rt} = 0,0404 e per N_0 crescenti a_{rt} continua a diminuire.

Quindi ai fini della dimostrazione si può scrivere che il rapporto della (4.2.8) del testo, nel peggiore dei casi (e cioè con la massima approssimazione) è:

$$u)\ \frac{Di_{N0pm}}{{Dh_{N0pm}}^2} = \frac{Dncncomp_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]}}{(Dnc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]})^2} * (1 - a_{rt})$$

$$v)\ \frac{Di_{N0pm}}{{Dh_{N0pm}}^2} \approx\ 2 * \mathrm{C2} * (1 - a_{rt}) \quad \approx\ 1{,}32 * (1 - a_{rt})$$

e di conseguenza per $N_0 = 127$ ed a_{rt} = 0,1812 si può scrivere:

$$w)\ \frac{Di_{N0pm}}{{Dh_{N0pm}}^2} \approx\ 2 * \mathrm{C2} *\ (1 - a_{rt})\ \approx\ 1{,}32 * 0{,}8188 \approx\ 1{,}0808$$

e per $N_0 = 1277$ ed a_{rt} = 0,0404:

$$x)\ \frac{Di_{N0pm}}{{Dh_{N0pm}}^2} \approx\ 2 * \mathrm{C2} *\ (1 - a_{rt}) \approx\ 1{,}32 * 0{,}9596 \approx\ 1{,}2666$$

e per N_0 crescenti il rapporto tende a 1,32.

Ora nell'intervallo]0, N_{0pm}] analogamente al calcolo della $Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}$, il prodotto Dh_{N0pm} delle rispettive singole densità indicate dalla h) (con x=1) per ognuno degli p_1 minori o uguali a p_{max} approssima (Appendice E) pur senza eguagliare la densità corretta $Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}$ degli interi non congrui con N_{0pm} modulo p_1 per ogni p_1 Ɛ {2, 3, 5……., p_{max}} (con p_{max} primo più alto minore o uguale della $\sqrt{2N_{0pm}}$). **Nei lemmi che seguono dimostreremo che $Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}$ e Dh_{N0pm} sono quasi asintoticamente equivalenti con un piccolo errore relativo (pari a $2*e^{-\gamma}$) per cui esso è tutto interno all'approssimazione " ≈ " della (4.2.8).**

Analogamente nello stesso intervallo]0, N_{0pm}], essendo N_{0pm} primo e quindi non multiplo di alcun numero dell'intervallo soprascritto, il prodotto Di_{N0pm} delle rispettive singole densità indicate dalla i) (con x=2) per ognuno degli p_1 minori o uguali a p_{max} approssima (Appendice E) pur senza eguagliare la densità $Dncncomp_{]0,\,N_{0pm}\,]}$ degli interi non congrui e non compcongrui con N_{0pm} modulo p_1 per ogni p_1 Ɛ {2, 3, 5……., p_{max}} (con p_{max} primo più alto minore o uguale della $\sqrt{2N_{0pm}}$). **Ed infatti sempre nei lemmi che seguono dimostreremo che Di_{N0pm} è quasi asintoticamente equivalente a $Dncncomp_{]0,\,N_{0pm}\,]}$.**

In definitiva allora potremo scrivere che:

$$y)\ \frac{Dncncomp_{]0,\,N_{0pm}\,]}}{{Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}}^2}\ \approx \frac{Di_{N0pm}}{{Dh_{N0pm}}^2} \approx\ 2 * \mathrm{C2} * (1 - a_{rt}) \quad \approx\ 1{,}32 * (1 - a_{rt})$$

Osservazione La x) comporta che il rapporto $\frac{Di_{N0pm}}{{Dh_{N0pm}}^2}$ tende a una costante, dunque Di_{N0pm} e ${Dh_{N0pm}}^2$ sono quasi asintoticamente equivalenti, cosa che sarà dimostrata in un modo diverso anche nel lemma c).

Lemma b) *Il prodotto Dh_{N0pm} e la densità $Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}$ degli interi nell'intervallo]0, Nopm] incongrui con Nopm sono funzioni asintoticamente quasi equivalenti (con un errore relativo pari a $2*e^{-\gamma}$).*

Innanzitutto possiamo dire che in base al TNP la densità $Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}$ dei numeri incongui con N_{0pm} modulo p_1 per ogni p_1 Ɛ {2, 3, 5……., p_{max}} (con p_{max} primo più alto minore o uguale della

$\sqrt{2N_{0pm}}$) nell'intervallo]0, N_{0pm}] è data, vedi anche la (2.2.5) del testo, dalla differenza tra i primi contenuti nell'intervallo]0, N_{0pm}] e quelli contenuti nell'intervallo]0, $\sqrt{2N_{0pm}}$] divisa per N_{0pm} e cioè da:

$$Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]} = \frac{\left(\frac{N0pm}{\log N0pm} - \frac{\sqrt{2N0pm}}{\log\sqrt{2N0pm}}\right)}{N0pm} \approx \frac{1}{\log N_{opm}} * \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{N_{0pm}}}\right)$$

anche se, soprattutto per valori non elevati di N_{0pm}, tale valore è molto meno preciso del prodotto Dh_{N0pm} delle singole densità indicate dalla h).

Ora per dimostrare la quasi equivalenza asintotica tra il prodotto Dh_{N0pm} e la densità $Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}$ calcoliamo il limite per $N_{0pm} \to \infty$ del rapporto tra la densità Dh_{N0pm} e quella $Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}$:

$$\lim_{N0pm\to\infty} \frac{\prod_{p=2}^{pmax}\left(1-\frac{1}{p} - \frac{p-[N0pm]_p}{N0pm*p}\right)}{\frac{1}{\log N0pm} * \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{N0pm}}\right)} = \frac{\lim_{N0pm\to\infty} \prod_{p=2}^{pmax}\left(1-\frac{1}{p} - \frac{p-[N0pm]_p}{N0pm*p}\right)}{\lim_{N0pm\to\infty} \frac{1}{\log N0pm} * \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{N0pm}}\right)} = \frac{\lim_{N0pm\to\infty} \prod_{p=2}^{pmax}\left(1-\frac{1}{p} - \frac{p-[N0pm]_p}{N0pm*p}\right)}{\lim_{N0pm\to\infty} \frac{1}{\log N0pm} * \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{N0pm}}\right)} =$$

$$= \frac{\lim_{N0pm\to\infty} \prod_{p=2}^{pmax}\left(1-\frac{1}{p}\right) - \lim_{N0pm\to\infty} \frac{p-[N0pm]_p}{N0pm*p}}{\lim_{N0pm\to\infty} \frac{1}{\log N0pm} * \lim_{N0pm\to\infty} \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{N0pm}}\right)} = \frac{\lim_{N0pm\to\infty} \prod_{p=2}^{pmax}\left(1-\frac{1}{p}\right) - 0}{\lim_{N0pm\to\infty} \frac{1}{\log N0pm} * 1} = \frac{\lim_{N0pm\to\infty} \prod_{p\le\sqrt{2*N0pm}} \frac{(p-1)}{p}}{\lim_{N0pm\to\infty} \frac{1}{2*\log\sqrt{2*N0pm} - \log 2}} =$$

$$= \lim_{N0pm\to\infty} \frac{\prod_{p\le\sqrt{2*N0pm}} \frac{(p-1)}{p}}{\frac{1}{2*\log\sqrt{2*N0pm}}} = 2 * \lim_{N0pm\to\infty} \log\sqrt{2 * N_{0pm}} * \prod_{p\le\sqrt{2*N0pm}} \frac{(p-1)}{p} = 2*e^{-\gamma} = 1{,}122 \cong 1$$

sapendo che per il terzo teorema di Merten's il limite $\lim_{N0pm\to\infty} \log\sqrt{2 * N_{0pm}} * \prod_{p\le\sqrt{2*N0pm}} \frac{(p-1)}{p}$ è uguale ad $e^{-\gamma}$ con γ costante di Eulero-Mascheroni uguale a 0,57721 ……….

Ai fini della dimostrazione questa relazione, anche se più debole dell'equivalenza asintotica, ci consente di porre da qui in avanti $Dh_{N0pm} \approx Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}$.

Lemma c) *Il prodotto Di_{N0pm} ed il quadrato di Dh_{N0pm} sono funzioni asintoticamente quasi equivalenti (con un errore relativo pari a 2*C_2).*

Per dimostrare la quasi equivalenza asintotica tra il prodotto Di_{N0pm} ed il quadrato della densità Dh_{N0pm} calcoliamo il limite per $N_{0pm} \to \infty$ del rapporto tra la densità Di_{N0pm} ed il quadrato di quella Dh_{N0pm}:

$$\lim_{N0pm\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\prod_{p=3}^{pmax}\left(1-\frac{2}{p} - \frac{2*(p-[N0pm]_p)}{N0pm*p}\right)}{\prod_{p=2}^{pmax}\left(1-\frac{1}{p} - \frac{p-[N0pm]_p}{N0pm*p}\right)^2} = \frac{\lim_{N0pm\to\infty} \frac{1}{2}\prod_{p=3}^{pmax}\left(1-\frac{2}{p} - \frac{2*(p-[N0pm]_p)}{N0pm*p}\right)}{\lim_{N0pm\to\infty} \prod_{p=2}^{pmax}\left(1-\frac{1}{p} - \frac{p-[N0pm]_p}{N0pm*p}\right) * \left(1-\frac{1}{p} - \frac{p-[N0pm]_p}{N0pm*p}\right)} =$$

$$\frac{\lim_{N0pm\to\infty} \frac{1}{2}\prod_{p=3}^{pmax}\left(1-\frac{2}{p}\right) - \lim_{N0pm\to\infty} \frac{1}{2}\prod_{p=3}^{pmax}\left(\frac{2*(p-[N0pm]_p)}{N0pm*p}\right)}{\lim_{N0pm\to\infty} \prod_{p=2}^{pmax}\left(1-\frac{1}{p} - \frac{p-[N0pm]_p}{N0pm*p}\right) * \lim_{N0pm\to\infty} \prod_{p=2}^{pmax}\left(1-\frac{1}{p} - \frac{p-[N0pm]_p}{N0pm*p}\right)} =$$

$$\frac{\lim_{N_{0pm}\to\infty}\frac{1}{2}\prod_{p=3}^{p_{max}}\left(1-\frac{2}{p}\right)}{\lim_{N_{0pm}\to\infty}\prod_{p=2}^{p_{max}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}=\frac{\lim_{N_{0pm}\to\infty}\frac{1}{2}\prod_{p=3}^{p_{max}}\left(\frac{p-2}{p}\right)}{\lim_{N_{0pm}\to\infty}\left(\prod_{p=2}^{p_{max}}\frac{p-1}{p}\right)^2}=\frac{\lim_{N_{0pm}\to\infty}\frac{1}{2}\prod_{p=3}^{p_{max}}\left(\frac{p-2}{p}\right)}{\lim_{N_{0pm}\to\infty}\frac{1}{4}\prod_{p=3}^{p_{max}}\left(\frac{p-1}{p}\right)^2}=\lim_{N_{0pm}\to\infty}\frac{1}{2}\prod_{p=3}^{p_{max}}\left(\frac{p-2}{p}\right)4*$$

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^2=2*\lim_{N_{0pm}\to\infty}\prod_{p=3}^{p_{max}}\left(\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\right)\approx 2*C_2\approx 1{,}32$$

Ai fini della dimostrazione questa relazione, anche se più debole dell'equivalenza asintotica, ci consente di porre da qui in avanti $Di_{N0pm} \approx Dh_{N0pm}{}^2$.

Lemma d) Dimostriamo che Di_{N0pm} e $Dncncomp_{]0,\ N_{0pm}]}$ ***sono asintoticamente equivalenti.***

Essendo:

1) $\lim_{N_{0pm}\to\infty}\frac{Dh_{N0pm}}{Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}} \approx 2*e^{-\gamma}$ (Lemma b)

2) $\lim_{N_{0pm}\to\infty}\frac{Di_{N0pm}}{(Dh_{N0pm})^2}\approx 2*C_2$ (Lemma c)

in base ai punti 1) e 2) possiamo scrivere che:

3) $\lim_{N_{0pm}\to\infty}\frac{Di_{N0pm}}{\left(Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}\right)^2}=\lim_{N_{0pm}\to\infty}\frac{Di_{N0pm}}{(Dh_{N0pm})^2}*\frac{(Dh_{N0pm})^2}{\left(Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}\right)^2}=\lim_{N_{0pm}\to\infty}\frac{Di_{N0pm}}{\left(Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}\right)^2}\approx$

$\approx 2*C_2*(2e^{-\gamma})^2 \approx 1{,}66$

e grazie al punto 1) ed alla u) possiamo scrivere:

4) $\frac{Di_{N0pm}}{Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}{}^2}\approx\frac{Dncncomp_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]}}{(Dnc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]})2}$

e cioè che i due rapporti $\frac{Di_{N0pm}}{Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}{}^2}$ e $\frac{Dncncomp_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]}}{(Dnc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]})2}$ sono asintoticamente quasi equivalenti.

In definitiva allora in base al fatto che:

- Di_{N0pm} approssima pur senza eguagliare la densità $Dncncomp_{]0,\,N_{0pm}\,]}$ (Lemma a)
- Di_{N0pm} e $\left(Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}\right)^2$ sono asintoticamente quasi equivalenti (formula 3)
- i due rapporti $\frac{Di_{N0pm}}{Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}{}^2}$ e $\frac{Dncncomp_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]}}{(Dnc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]})2}$ sono asintoticamente quasi equivalenti

potremmo dedurre che $Di_{N0pm} \approx Dncncomp_{]0,\ N_{0pm}]}$ ma questo rimane un punto aperto.

In definitiva [vedi w) ed x)] il rapporto $\frac{Di_{N0pm}}{Dh_{N0pm}{}^2}\approx\frac{Dncncomp_{]0,\,N_{0pm}\,]}}{Dnc_{]0,\,N_{0pm}\,]}{}^2}$ risulta sempre maggiore di 1 e rimane quindi dimostrata la (4.2.8) e la (4.2.19) del testo sostituendo al valore $2*C_2$ quello $2*C_2*(1-a_{rt})$.

APPENDICE C

Volendo fare un esempio numerico poniamo il primo M = 41 e per facilità di esposizione indichiamo l'intervallo]0, M] =]0, 41] nel modo sottoindicato dove sono incolonnati:

- a destra i numeri n_0 prisotto di M=41
- a sinistra i numeri n_0 di cui 1 è incongruo (nc1) e incompcongruo (ncomp1)

posizionati in riga rispettivamente con i numeri dell'intervallo]0, 41] aventi quelle caratteristiche

n0 di cui 1 è incompcongruo(ncomp1) e incongruo (nc1)			M		n0 prisotto di M(NC)
41			41	NC	0
40	ncomp1		40		1
39			39		2
38		nc1	38		3
37			37	NC	4
36	ncomp1		36		5
35			35		6
34			34		7
33			33		8
32		nc1	32		9
31			31	NC	10
30	ncomp1	nc1	30		11
29			29	NC	12
28	ncomp1		28		13
27			27		14
26			26		15
25			25		16
24		nc1	24		17
23			23	NC	18
22	ncomp1		22		19
21			21		20
20		nc1	20		21
19			19	NC	22
18	ncomp1	nc1	18		23
17			17	NC	24
16	ncomp1		16		25
15			15		26
14		nc1	14		27
13			13	NC	28
12	ncomp1	nc1	12		29
11			11	NC	30
10	ncomp1		10		31
9			9		32
8		nc1	8		33
7			7	NC	34

6	ncomp1	nc1	6		35
5		primi	5	primi	36
		minori di		minori	
4			4	di	37
3		Rad(M)	3	Rad(M)	38
2			2		39
1			1		40
0			0		41

Nella tabella ci sono 10 n_0 prisotto di M (NC), 10 n_0 di cui 1 è non congruo (nc1), 10 n_0 di cui 1 è non compcongruo (ncomp1) e 3 n_0 di cui 1 non è congruo e non è compcongruo (PG) per i quali n_0 +1 ed n_0 -1 risultano primi.
Si verifica facilmente dalla tabella che la densità verificata $(Dnc_{]0,M]ver})^2$=10/41=0,2439; Dncncomp(PG)(ver) =3/41=0,0731; PG(ver)= 3.

Invece dal TNP e dalla (3.3.8) si ha che:

- la densità calcolata $Dnc_{]0,M]calc}$ = (M/lnM – Rad(M)/lnRad(M))/M = [1 – (2/Rad(M)]*(1/lnM) = [1-(2/Rad(41)]*1/ln41=0,1851 (con approssimazione pari al 24,10 %)
- Dncncomp(PG)(calc) =1,32*$(Dnc_{]0,M]calc})^2$ = 0,0452 (con approssimazione pari al 38,16 %)
- PG(calc) = 41* Dncncomp(PG)(calc) = 1 (con approssimazione pari al 66 %)

Ma con M ≥ 53 (primo Primo maggiore di 49) i valori delle grandezze precedenti cambiano insieme alle relative approssimazioni come da tabella esemplificativa:

M	**$Dnc_{]0,M]ver}$**	**$Dnc_{]0,M]calc}$**	**Appr. %**	**Dncncomp(PG) (ver)**	**Dncncomp(PG) (calc)**	**Appr. %**	**PG (ver)**	**PG (calc)**	**Appr. %**
53	0,226	0,182	19,32	0.0754	0,0440	41,63	4	2	50,0
20047	0,111	0,995	10,65	0,0163	0,0130	20,09	328	262	20,0
40009	0,103	0,093	10,11	0,0143	0,0115	19,56	573	460	19,72

APPENDICE D

Volendo fare un esempio numerico poniamo il primo M = 41 e per facilità di esposizione indichiamo l'intervallo]0, 2M] =]0, 82] nel modo sottoindicato dove sono incolonnati:

- I numeri dispari compresi tra 0 ed 82 in quanto, a parte il 2, sono solo tra essi presenti i numeri primi
- I numeri n_0 prisotto (nc) e prisopra (ncomp) dell'intervallo]0, 41] posizionati in riga rispettivamente con i numeri primi dell'intervallo]0, 41] e con i numeri primi dell'intervallo [41, 82]

n0 prisopra (ncom) e prisotto (nc)				M	
0	ncomp	nc		41	
2	ncomp		39		43
4		nc	37		45
6	ncomp		35		47
8			33		49
10		nc	31		51
12	ncomp	nc	29		53
14			27		55
16			25		57
18	ncomp	nc	23		59
20	ncomp		21		61
22		nc	19		63
24		nc	17		65
26	ncomp		15		67
28		nc	13		69
30	ncomp	nc	11		71
32	ncomp		9		73
34		primi	7		75
36		minori di	5		77
38	ncomp	Rad(2M)	3		79
			1		81

Nella tabella ci sono 9 n_0 prisotto (nc) di M, 10 n_0 prisopra (ncomp) di M e 4 n_0 prisotto e prisopra (M_G) di M per i quali 41+ n_0 e 41- n_0 risultano primi.
Si verifica facilmente dalla tabella che la densità verificata $Dnc_{]0,M]ver}$ = 9/41=0,2195; Dncncomp(M_G)(ver) =4/41=0,0975; M_G(ver) = 4.

Invece dal TNP e dalla (4.2.8) si ha che:

- La densità calcolata $Dnc_{]0,M]calc}$= (M/lnM – Rad(2M)/lnRad(2M))/M = [1 – (2*Rad(2)/Rad(M)]*(1/lnM) = [1-(2*Rad(2)/Rad(41)]*1/ln41=0,1502 (con approssimazione pari al 31,57 %)

- Dncncomp(M_G)(calc) =1,32*($Dnc_{]0,M]calc}$)^2 = 0,0297 (con approssimazione pari al 69,53 %)

- M_G(calc) = 41* Dncncomp(M_G)(calc) = 1 (con approssimazione pari al 75 %)

Ma con M ≥ 127 (primo Primo maggiore di 121) i valori delle grandezze precedenti cambiano insieme alle relative approssimazioni come da tabella esemplificativa:

M	**Dnc**$_{]0,M]ver}$	**Dnc**$_{]0,M]calc}$	**Appr. %**	**Dncncomp**(M_G) **(ver)**	**Dncncomp**(M_G) **(calc)**	**Appr %**	M_G **(ver)**	M_G **(calc)**	**Appr %**
127	0,196	0,1546	21,45	0,0629	0,0315	49,9	8	4	50,0
20047	0,110	0,0989	10,70	0,0146	0,0129	11,6	293	259	11,6
40009	0,103	0,0930	10,18	0,0127	0,0114	10,3	510	457	10,4

APPENDICE E

Sappiamo che in base al calcolo combinatorio $(Dnc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]})$ e $(Dncncomp_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]})$ sono rispettivamente uguali a:

$$\prod_{p=2}^{p_{max}} \frac{(p-1)}{p} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{p}$$

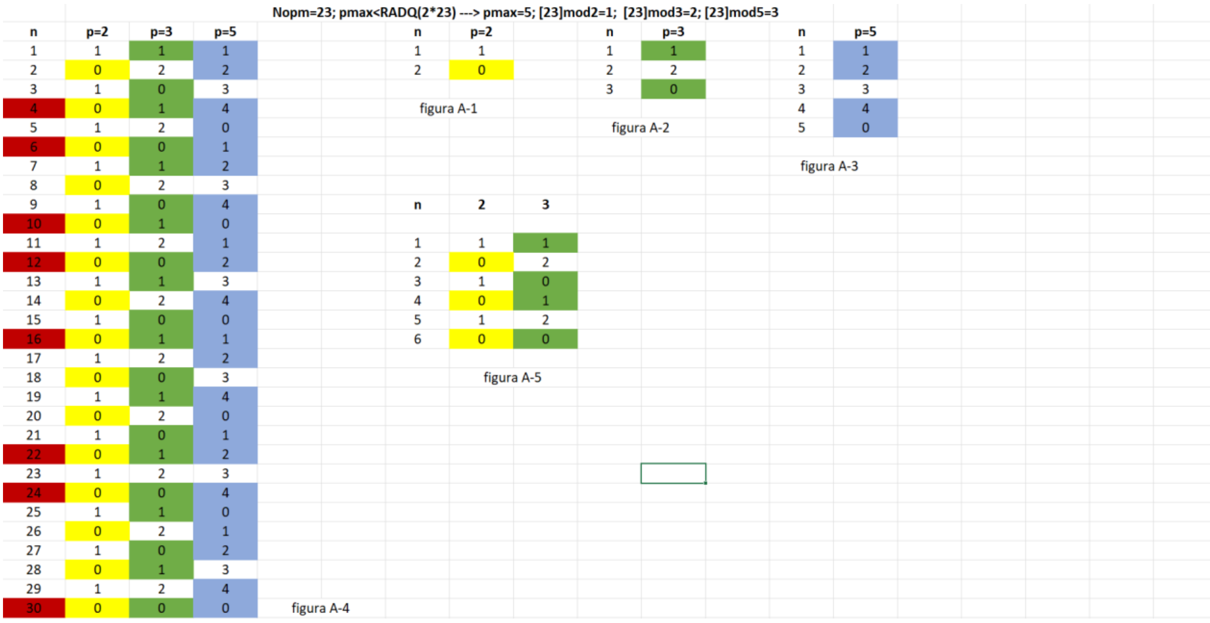
con pmax il primo più alto minore di $\sqrt{2N_{0pm}}$

Sviluppando la $Dncncomp_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]}$ (ma sarebbe del tutto analogo sviluppando la $Dnc_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]}$) e moltiplicando e dividendo tutti i termini del prodotto per $p_{max}\#$, otteniamo:

$$Dncncomp_{]0,\sqrt{2N_{0pm}}\#]} = \frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{p} = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{3}{5} * \frac{5}{7} * \ldots \ldots .. * \frac{p_{max}-2}{p_{max}} =$$

$$\frac{p_{max}\#/2}{p_{max}\#} * \frac{p_{max}\#/3}{p_{max}\#} * \frac{3*p_{max}\#/5}{p_{max}\#} * \frac{5*p_{max}\#/7}{p_{max}\#} * \ldots \ldots \ldots .. * \frac{(p_{max}-2)*p_{max}\#/p_{max}}{p_{max}\#}$$

dove i singoli termini del prodotto finale rappresentano le singole densità nell'intervallo $]0, p_{max}\#]$ dei numeri incongrui ed incompcongrui con N_{0pm} mod. p_1. In modo del tutto analogo riferendoci alla densità $\mathrm{Dncncomp}_{]0,N_{0pm}]}$ essa sarà data all'incirca dal prodotto delle singole densità D2 (p_1). Questa piccola approssimazione è dovuta al fatto che sia la singola densità (p-2)/p degli incongrui ed incompcongrui con Nopm modulo p sia la densità totale degli incongrui ed incompcongrui con Nopm ∏(p-2)/p risultano corrette per il calcolo combinatorio fino a quando l'ampiezza dell'intervallo a cui si riferiscono è rispettivamente multiplo del singolo p o di tutti gli p ≤ pmax. Nel nostro intervallo]0, Nopm] invece l'ampiezza non è multipla di nessun p ≤ pmax e questo comporta sia la piccola differenza tra Dncncomp]0, Nopm] e Dncncomp]0, pmax #] che quella tra Dinopm e la densità Dncncomp]0, Nopm].
Per maggiore chiarezza facciamo un esempio tabellare sulla base dello sviluppo delle diverse combinazioni possibili dei numeri incongrui con N_{0pm} modulo p_1 per tutti gli p_1 ≤ p_{max}. Nell'esempio facciamo riferimento per semplicità al calcolo della Dnc]0, Nopm] (per quello della Dncncomp]0, Nopm] il ragionamento è del tutto analogo) e scegliamo un valore piccolo di N_{0pm}. L'esempio è riportato in figura A.



Nopm=23; pmax<RADQ(2*23) ---> pmax=5; [23]mod2=1; [23]mod3=2; [23]mod5=3

n	p=2
1	1
2	0

figura A-1

n	p=3
1	1
2	2
3	0

figura A-2

n	p=5
1	1
2	2
3	3
4	4
5	0

figura A-3

n	p=2	p=3	p=5
1	1	1	1
2	0	2	2
3	1	0	3
4	0	1	4
5	1	2	0
6	0	0	1
7	1	1	2
8	0	2	3
9	1	0	4
10	0	1	0
11	1	2	1
12	0	0	2
13	1	1	3
14	0	2	4
15	1	0	0
16	0	1	1
17	1	2	2
18	0	0	3
19	1	1	4
20	0	2	0
21	1	0	1
22	0	1	2
23	1	2	3
24	0	0	4
25	1	1	0
26	0	2	1
27	1	0	2
28	0	1	3
29	1	2	4
30	0	0	0

figura A-4

n	2	3
1	1	1
2	0	2
3	1	0
4	0	1
5	1	2
6	0	0

figura A-5

Nelle figure A-1, A-2 ed A-3 sono riportati con sfondi colorati gli n incongrui con Nopm rispettivamente per i moduli 2, 3 e 5 negli intervalli [1, 2], [1, 3] ed [1, 5]. Volendo calcolare i numeri incongrui con Nopm per i moduli 2, 3 e 5 vediamo prima nella fig. A-5 come si combinano i numeri incongrui con Nopm per il modulo 2 con quelli incongrui per il modulo 3 nell'intervallo [1, 2*3]. Osserviamo come, a causa della primalità di 2 e di 3, l'incongruo 0 del modulo 2 si combina nell'intervallo [1, 6] con tutti i valori del modulo 3 e quindi anche con gli incongrui 1 e 0 del modulo 3. Nell'intervallo [1, 6] Le combinazioni di incongruenza totale (per il modulo 2 ed il modulo 3) sono 2 = (2-1)*(3-1) e la densità Dnc di numeri incongrui con Nopm nello stesso intervallo è 2/6 = 1/3

Vediamo quindi nella figura A-4 come le due incongruenze mod. 2 e mod. 3 dell'intervallo [1, 6] si combinano nell'intervallo [1, 2*3*5], dove 2*3*5=30 = pmax #, con tutti i valori del modulo 5 e quindi anche con gli incongrui 0, 1, 2 e 4 del modulo 5. Nell'intervallo]0, 30] le combinazioni di incongruenza totale (per il modulo 2, il modulo 3 ed il modulo 5) sono 8 = (2-1)*(3-1)*(5-1) e la densità Dnc]0, pmax #] di numeri incongrui con Nopm nello stesso intervallo è 8/30 = 4/15 = 0,2666….

Consideriamo ora, invece dell'intervallo]0, 30] =]0, pmax #], l'intervallo]0, 23] =]0, Nopm] e mettiamo a confronto la densità Dnc]0, Nopm] di incongrui con Nopm relativa al suddetto intervallo e ricavabile dalla fig. A-4 con quella Dhnopm calcolabile come prodotto delle singole densità D(p_1) (vedi la a) dell'Appendice B) relative ai moduli 2, 3, 5.

Dalla figura A-4 ricaviamo che i numeri incongrui con Nopm (23) nell'intervallo]0, 23] sono 6 e che quindi la densità Dnc]0, Nopm] è pari a 6/23 = 0,2608….

Per il calcolo invece della Dhnopm calcoliamo le singole densità D(p_1) dei numeri incongrui con Nopm rispettivamente per i moduli 2, 3 e 5:

D(p_1) = (L*(p_1 - 1) + [Nopm]p_1 - h)/Nopm

dove L è uguale al rapporto tra il massimo multiplo Xp_1 di p_1 contenuto nell'intervallo]0, N0pm] e p_1; dove [N0pm]p_1 è la classe di Nopm modulo p_1 ed è pari alla ampiezza dell'intervallo]Xp_1, Nopm]; dove h è il numero di numeri congrui presenti nell'intervallo]Xp_1, Nopm] e che nel nostro caso è pari ad 1 essendo Nopm un numero congruo con se stesso. Pertanto avremo:

D(2) = (11*1+(1-1))/23 = 11/23;   D(3) = (7*2+(2-1))/23 = 15/23;   D(5) = (4*4+(3-1))/23 = 18/23

e quindi: Dhnopm = D(2)*D(3)*D(5) = 11/23 * 15/23 * 18/23 = 0,2441

Da questo confronto ricaviamo che l'approssimazione relativa tra la Dnc]0, Nopm] e la Dhnopm è di circa il 6,4 % e si può facilmente verificare che la suddetta approssimazione si mantiene per valori crescenti di Nopm molto al di sotto del 10%

Questa approssimazione è dovuta al fatto che sia la singola densità (p-1)/p degli incongrui con Nopm modulo p sia la densità totale degli incongrui con Nopm ∏(p-1)/p risultano corrette per il calcolo combinatorio fino a quando l'ampiezza dell'intervallo a cui si riferiscono è rispettivamente multiplo del singolo p o di tutti gli p ≤ pmax. Nel nostro intervallo]0, Nopm] invece l'ampiezza non è multipla di nessun p ≤ pmax e questo comporta sia la piccola differenza tra Dnc]0, Nopm] e Dnc]0, pmax #] che quella tra Dhnopm e la densità Dnc]0, Nopm] dei numeri incongrui con Nopm moduli 2, 3 e 5

Lo stesso ragionamento con analoghe conclusioni lo si può fare sull'approssimazione tra la Dncncomp]0, Nopm] e la Dinopm

BIBLIOGRAFIA

(a) Introduzione alla Teoria Analitica dei Numeri di Alessandro Zaccagnini:
http://people.dmi.unipr.it/alessandro.zaccagnini/psfiles/lezioni/tdn2005.pdf

(b) Appunti di Teoria elementare dei numeri di Francesco Fumagalli
Teoria_dei_Numeri.pdf (unifi.it)

(c) HARDY-LITTLEWORD: La congettura dei primi gemelli
Wikizero - Congettura dei numeri primi gemelli

(d) VINOGRADOV: Teorema, corollario
https://it.wikipedia.org/wiki/Ivan_Matveevi%C4%8D_Vinogradov